

CALCULO DE PROBABILIDADES I

Tarea 3
(Respuestas)

$$1. f_X(x) = \begin{cases} 1/10 & , \text{ si } x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\ 0 & , \text{ e.o.c.} \end{cases}$$

$$2. a) f(x) = \frac{\binom{6}{x} \binom{4}{n-x}}{\binom{10}{n}} I_{\{0,1,\dots,6\}}(x); \quad b) f(x) = \binom{n}{x} \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{n-x} I_{\{0,1,2,\dots,n\}}(x)$$

3. Para que sea función de densidad tiene que sumar 1 en todos sus puntos y además tiene que ser mayor igual a cero, entonces

$$c = \frac{1}{2^{n+1} - 2}$$

$$4. a) P(X \text{ es negativa}) = 0.3$$

$$b) P(X \text{ es impar}) = 0.7$$

$$c) P(1 \leq X \leq 8) = 0.55$$

$$d) P(X = -3 \mid X \leq 0) = 0.222 \text{ (Usar definición de probabilidad condicional).}$$

$$e) P(X \geq 3 \mid X > 0) = 0.4545.$$

$$5. a) f(x) = (2x-1) \left(\frac{1}{12}\right)^2 I_{\{1,2,\dots,12\}}(x); \quad b) f(x) = 2(x-1) \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{1}{11}\right) I_{\{2,3,\dots,12\}}(x)$$

$$6. a) P(Y \leq y) = F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < n \\ \frac{y C_n}{r C_n} & , n \leq y \leq r; \\ 1 & , y \geq r \end{cases} \quad b) P(Z \geq z) = \frac{(r-z+1)(r-z) \cdots (r-z-n+2)}{r(r-1) \cdots (r-n+1)}, \quad z = 1, 2, \dots, r-n+1$$

$$7. a) P(\text{a lo más se tire el dado 6 veces}) = 0.6651; \quad b) \text{ con 4 o más tiros la } P(\text{un 6}) \geq 0.5.$$

$$8. P(|X - 1| \geq 2) = 1 - F_X(3) + F_X(-1)$$

9.

$$F_X(x) = \frac{x}{R^2} I_{[0, R^2]}(x) + I_{[R^2, \infty)}(x)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{R^2} I_{[0, R^2]}(x)$$

10.

$$F_X(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 3/4 s^2}}{s} I_{\left[\frac{\sqrt{3}}{2} s, s\right]}(x) + I_{(s, \infty)}(x)$$

$$f_X(x) = \frac{4x}{s\sqrt{4x^2 - 3s^2}} I_{\left[\frac{\sqrt{3}}{2} s, s\right]}(x)$$

11.

$$a) F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & , 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2} & , 1 < x \leq 2 \\ 1 & , x > 2 \end{cases}; \quad b) f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & , 1 < x \leq 2 \\ 0 & , x > 2 \end{cases}$$

$$12. a) P(1/2 \leq X \leq 3/2) = 7/12$$

$$b) P(1/2 \leq X \leq 1) = 1/3$$

$$c) P(1/2 \leq X < 1) = 1/6$$

$$d) P(1 \leq X \leq 3/2) = 5/12$$

e) $P(1 < X < 2) = 1/2$

f) $f(x) = \frac{1}{3} I_{(0,1)}(x) + \frac{1}{2} I_{(1,2)}(x) + \frac{1}{6} I_{\{1\}}(x)$

13. a) Encuentre $P(1 \leq |x| \leq 2) = 0.2325$; b) $F(x) = \left(1 - \frac{1}{2} e^{-x}\right) I_{[0,\infty)}(x) + \frac{1}{2} e^x I_{(-\infty,0)}(x)$

14. $f(x) = \frac{1}{2(|x|+1)^2}$, $-\infty < x < \infty$; $F'(x) = f(x)$ para todo x .

15. $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} I_{(-1,1)}(x)$

16. Las condiciones en términos de la distribución acumulada de X son: $F(a+x) + F(a-x) = 1$.

17. a) Hay que demostrar que:

i) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

ii) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

b) La afirmación es falsa porque para que sea verdadera θ_1 y θ_2 tienen que ser mayores o iguales a cero.

18. $k = 4\sqrt{\frac{3}{2}} = 11067$

19.

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 9/16 & , 0 \leq x < 1 \\ 15/16 & , 1 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} 9/16 & , x = 0 \\ 3/8 & , x = 1 \\ 1/16 & , x = 2 \\ 0 & , \text{e.o.c.} \end{cases}$

20. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x I_{\{1,2,\dots\}}(x)$

21. a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x I_{\{1,2,\dots\}}(x)$; b) $P(B \text{ gane}) = P(X \text{ sea par}) = 1/3$.

22. a) Demuestre las 2 condiciones que debe cumplir cualquier función de densidad,

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq \alpha - \beta \\ \frac{x - \alpha}{\beta} + \frac{(x - \alpha)^2}{2\beta^2} + \frac{1}{2} & , \alpha - \beta \leq x < \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta} - \frac{(x - \alpha)^2}{2\beta^2} + \frac{1}{2} & , \alpha \leq x < \alpha + \beta \\ 1 & , x \geq \alpha + \beta \end{cases}$$

23. a) $P(X \leq 40) = 0.64$

b) Sea $Y = v.a$ que cuenta el número de intentos necesarios para obtener un éxito. $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 0.953$

24.

$$f(x) = \begin{cases} 7/24 & , x = 0 \\ 11/24 & , x = 1 \\ 5/24 & , x = 2 \\ 1/24 & , x = 3 \\ 0 & , \text{e.o.c.} \end{cases}$$

25. a) $F(x) = (x^2 + 0.2) I_{[0,0.5)}(x) + x I_{[0.5,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x)$

$$b) f(x) = 2x I_{[0,0.5)}(x) + I_{[0.5,1)}(x) + 0.2I_{\{0\}}(x) + 0.05I_{\{0.5\}}(x)$$

$$c) \text{ Calcule } P(0.25 < X < 0.75) = 0.4875$$

$$d) \text{ Calcule } P(0.25 < X < 0.5) = 0.1875.$$

26. Demostrar los 4 puntos que debe de cumplir cualquier función de distribución acumulada.

27. Demostrar los dos puntos que debe de cumplir cualquier función de densidad.

$$28. a) P(X \geq 2) = 0.7$$

$$b) P(X \leq 3 | X \geq 1) = 2/3$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & , w = 0 \\ 0.2 & , w = 1 \\ 0.4 & , w = 2 \\ 0.3 & , w = 4 \\ 0 & , \text{e.o.c.} \end{cases}$$