CALCULO DE PROBABILIDADES II

Tarea 1

PROFESOR: LUIS ENRIQUE NIETO BARAJAS

1. Sean X y Y un v.a. con función de densidad conjunta uniforme en el interior de un triángulo con vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(1,2)$.
   (a) Encuentra $P(X \leq 1, Y \leq 1)$
   (b) Encuentra las funciones de densidad marginales $f(x)$ y $f(y)$
   (c) Encuentra las funciones de densidad condicionales $f(x \mid y)$ y $f(y \mid x)$
   (d) Encuentra la función de distribución acumulada $F(x,y)$
   (e) Determina si X y Y son independientes

2. La función de densidad conjunta de X y Y está dada por
$$f(x,y) = 3(x+y)I_{(0,1)}(x+y)I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$$
   (a) Calcula $P(X+Y < 1/2)$
   (b) Encuentra las funciones de densidad marginales $f(x)$ y $f(y)$
   (c) Encuentra las funciones de densidad condicionales $f(x \mid y)$ y $f(y \mid x)$
   (d) Encuentra la función de distribución acumulada $F(x,y)$
   (e) Determina si X y Y son independientes

3. La función de densidad marginal de X está dada por $f(x) = \frac{x}{3}I_{\{1,2\}}(x)$ y la densidad condicional de Y dado $X = x$ es $\text{Bin}(x, 1/2)$.
   (a) Encuentra la densidad marginal de Y
   (b) Encuentra la densidad condicional de X dado $Y = 2$

4. Sean X y Y un v.a. con función de densidad conjunta dada por
$$\frac{1}{2}xyI_{\{0,x\}}(y)I_{\{0,2\}}(x)$$

(a) Calcula $P(X+Y<1/2)$

(b) Encuentra las densidad marginales de X y Y

(c) Encuentra las densidad condicionales de $X \mid Y=y$ y $Y \mid X=x$

(d) Calcula $\mathrm{Cov}(X,Y)$

5. Se lanzan 3 monedas honestas. Sea X el número de soles en las primeras 2 monedas y sea Y el número de áquilas en las últimas 2 monedas

    (a) Encuentra la distribución conjunta de X y Y

    (b) Encuentra la distribución condicional de Y dado que $X=1$

    (c) Calcula $\mathrm{E}(X+Y)$

    (d) Calcula $\mathrm{Cov}(X,Y)$

6. Un sociólogo dice que los padres suelen mimar más a sus hijos aplicados que a sus hijos flojos. Para probarlo, se les preguntó a 3,200 estudiantes cuántos viajes al extranjero habían realizado el año pasado y cuántas materias habían reprobado. Los resultados fueron los siguientes

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4
0	187	300	150	225	338
1	156	250	125	189	280
2	125	200	100	150	225
3	32	50	25	36	57

donde X es el número de viajes y Y el número de materias reprobadas.

    (a) Encuentra la función de densidad conjunta

    (b) Encuentra las distribuciones marginales de X y Y

    (c) Encuentra las distribuciones condicionales de $X \mid Y$ y $Y \mid X$

    (d) Calcula $P(Y<2)$, $P(X<2)$, $P(Y=0 \mid X=3)$, $P(Y<3 \mid X=3)$, $P(Y \geq 3 \mid X=3)$

    (e) Determina si X y Y son indeopendientes

    (f) ¿Qué puede concluir el sicólogo del estudio?

7. Sean X y Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} I_{(0,y)}(x) I_{(0,\infty)}(y)$$

    (a) Calcula $P(X+Y<1)$

    (b) Encuentra las densidades marginales de X y Y

(c) Encuentra la función de distribución conjunta de X y Y

(d) Calcula $\mathrm{Cov}(X, Y)$

(e) Si $\lambda = 1$, calcula $\mathrm{Var}(Y \mid X > 1, Y > 1)$

8. Una urna contiene 4 pelotas, dos de ellas están numeradas con un uno y las otras dops con un dos. Dos pelotas son seleccionadas de la urna sin reemplazo. Sea X el número más pequeño y Y el número más grande, de las dos pelotas seleccionadas.

   (a) Encuentra la distribución conjunta de X y Y

   (b) Encuentra als distribuciones marginales de X y de Y

   (c) Encuenta las distribuciones condicionales de $X \mid Y = y$ y $Y \mid X = x$

9. Sea (X, Y) un v.a. continuo tal que $f(y \mid x) = I_{(x,x+1)}(y)$ y $f(x) = I_{(0,1)}(x)$.

   (a) Calcula $\mathrm{E}(Y)$

   (b) Calcula $\mathrm{Var}(Y)$

   (c) Calcula $\mathrm{Cov}(X, Y)$

   (d) Encuentra la función de densidad marginal de Y

10. Sean X y Y v.a.i.i.d. con distribución $\mathrm{Geo}(p)$, i.e.

$$f(x) = p(1-p)^x I_{\{0,1,\ldots\}}(x).$$

   Calcula $P(X = Y)$.

11. Sea $Y \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ y $X \mid Y \sim \mathrm{Bin}(y, p)$

   (a) Calcula $E(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$

   (b) Encuentra la distribución marginal de X

   (c) Encuentra la distribución condicional de Y dado $X = x$

   (d) Calcula $\mathrm{Cov}(X, Y)$

12. Sea $Y \sim \mathrm{Bin}(m, r)$ y $X \mid Y \sim \mathrm{Bin}(y, p)$

   (a) Calcula $E(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$

   (b) Encuentra la distribución marginal de X

   (c) Encuentra la distribución condicional de Y dado $X = x$

   (d) Calcula $\mathrm{Cov}(X, Y)$

13. Sea $N \sim \text{Geo}(p)$ y $X \mid N \sim \text{Ga}(n+1, \lambda)$
    (a) Calcula $E(X)$ y $\text{Var}(X)$
    (b) Encuentra la distribución marginal de X
    (c) Encuentra la distribución condicional de N dado $X = x$

14. Una persona sale de su casa rumbo al trabajo entre 8:00 y 8:30 y le toma entre 40 y 50 minutos llegar al trabajo. Sea X la v.a. que denota el tiempo de salida y Y la v.a. que denota el tiempo que le toma llegar al trabajo. Suponiendo que X y Y son independientes con distribución uniforme, encuentra la probabilidad de que la persona llegue al trabajo antes de las 9:00.

15. Sea $\mathbf{X}' = (X_1, X_2)$ un v.a. normal bivariado con vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de varianzas y covarianzas Σ, tal que

    $$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp\left\{ t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{1}{2}\left(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1 t_2 \sigma_1\sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2\right)\right\}$$

    con $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = -1$, $\sigma_1^2 = 6$, $\sigma_2^2 = 3$, $\sigma_{12} = 2$. Sean $Y_1 = X_1 + 2X_2$ y $Y_2 = 3X_1 - 2X_2$.
    (a) Usando propiedades de varianza calcula $\text{Var}(Y_1)$
    (b) Calcula $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$
    (c) Encuentra la distribución marginal de Y_2

16. Tres monedas honestas se lanzan diez veces. Sea X_i el núemro de veces que se obtuvieron i soles, $i = 0, 1, 2, 3$. Claramente $\sum_{i=0}^{3} X_i = 10$. Calcula
    (a) $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 4)$
    (b) $P(X_1^2 < 5)$
    (c) $P(X_0 + X_1 = 6)$
    (d) $P(X_2 < 2 \mid X_1 = 5, X_0 = 3)$

17. Preguntas varias.
    (a) Sea (X, Y) un v.a. tal que $X \mid Y = y \sim \text{N}(y, y^2)$ y $Y \sim \text{N}(1, 2)$. Calcula $E(XY)$.
    (b) Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. $\text{N}(0, 1)$ y sea $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Calcula $\text{Cov}(X_1, \overline{X})$.
    (c) Sean X y Y v.a. idénticamente distribuidas con media 1, varianza 2 y coeficiente de correlación 1/2. Calcula $\text{Var}(2X - Y + 5)$.
    (d) Si $E(X \mid Y) = 18 - (3/5)Y$ y $\text{E}(Y \mid X) = 10 - (1/3)X$. Calcula $\text{E}(X)$ y $\text{E}(Y)$.
    (e) Sea X una v.a. con media μ y varianza σ^2. Sea $Y = a + bX$. Encuentra a y b de tal manera que Y tenga media cero y varianza uno. Calcula además $\text{Cov}(X, Y)$.