ESTADISTICA MATEMATICA

Tarea 1

PROFESOR: LUIS ENRIQUE NIETO BARAJAS

1. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con función de densidad

$$f(x \mid \theta) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x).$$

   (a) Encuentra una estadística suficiente para θ, distinta de la trivial.
   (b) Encuentra un estimador de θ por el método de momentos.
   (c) Encuentra un estimador de θ por el método de máxima verosimilitud.
   (d) Encuentra el estimador de máxima verosimilitud del tercer cuantil de X.
   (e) Encuentra la distribución de muestreo de la estadística $T(\underline{X}) = X_{(n)}$.

2. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* de una distribución $Po(\lambda)$, i.e.

$$f(x \mid \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \mathbb{I}_{\{0,1,\ldots\}}(x).$$

   (a) Encuentra una estadística suficiente para λ, distinta de la trivial.
   (b) Encuentra un estimador de momentos para λ.
   (c) Encuentra el estimador de máxima verosimilitud para λ.
   (d) Encuentra la distribución de muestreo de la estadística suficiente que encontraste en el inciso (a).

3. La siguiente tabla resume la información contenida en una muestra aleatoria de tamaño 50 de una población $Bin(5, p)$:

x	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	6	10	14	13	6	1

(a) Encuentra el estimador de momentos de $\mathbb{P}(X=2)$. Usando los datos de la tabla obtén un valor estimado para la probabilidad.

(b) Encuentra el estimador de máxima verosimilitud de $\mathbb{P}(X=2)$. Usando los datos de la tabla obtén un valor estimado de la probabilidad.

(c) Compara los valores estimados de los incisos (a) y (b) con el valor del estimador empírico $\overset{*}{\mathbb{P}}(X=2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}(X_i = 2)$.

4. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población definida por una de dos funciones de densidad:

$$f(x \mid \theta) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x), & \text{si } \theta = 1, \\ \\ \frac{1}{\pi(1+x^2)} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x), & \text{si } \theta = 2. \end{cases}$$

(a) Encuentra el estimador de máxima verosimilitud para θ.

(b) Evalúa el valor de tu estimador usando la siguiente muestra de tamaño $n = 10$, $x = (-1.5, -0.7, -0.6, 0.5, 0.9, 0.9, 1.2, 1.7, 1.7, 2.0)$.

5. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con función de densidad

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{2\theta} \mathbb{I}_{(-\theta,\theta)}(x), \quad \theta > 0.$$

Considere $n = 1$ y $T(X) = |X|$ una estadística.

(a) Determina si $T(X)$ es una estadística suficiente para θ.

(b) Encuentra la distribución de muestreo de $T(X)$.

6. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con función de densidad

$$f(x \mid \theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|} \mathbb{I}_{\{-1,0,1\}}(x), \quad 0 \le \theta \le 1.$$

(a) Encuentra una estadística suficiente para θ.

(b) Encuentra un estimador de momentos de θ.

(c) Encuentra un estimador de máxima verosimilitud de θ.

(d) Determina si la densidad pertenece a la familia exponencial. En caso afirmativo indica cuál sería una estadística suficiente y completa.

7. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* de $N(\alpha + \beta y_i, 1)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y y_i es una constante conocida pero distinta para cada individuo. Sea $\theta = (\alpha, \beta)$.

(a) Encuentra una estadística conjuntamente suficiente para θ, distinta de la trivial.
(b) Encuentra un estimador de θ por el método de máxima verosimilitud.

8. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con función de densidad

$$f(x \mid \theta) = e^{-(x-\theta)}\mathbb{I}_{[\theta,\infty)}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determina si la densidad pertenece a la familia exponencial.
   (b) Encuentra la distribución de muestreo de la estadística $T(\underline{X}) = X_{(1)}$ y determina si es suficiente usando la definición de suficiencia.
   (c) Encuentra un estimador de momentos de θ.
   (d) Encuentra un estimador de máxima verosimilitud de θ.

9. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con función de densidad

$$f(x \mid \theta) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

   (a) Determina si la densidad pertenece a la familia exponencial.
   (b) Encuentra una estadística suficiente para θ, distinta de la trivial.
   (c) Encuentra un estimador de momentos de θ.
   (d) Encuentra el estimador de máxima verosimilitud de θ.

10. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con función de densidad

$$f(x \mid \theta) = \theta x^{\theta-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0.$$

   (a) Sean $\underline{x}$ y $\underline{y}$ dos posibles valores de la muestra. ¿Qué requisitos deben cumplir las muestras para que se satisfaga el principio de verosimilitud?
   (b) Usando la definición de suficiencia, prueba si $T(\underline{X}) = X_{(n)}$ es una estadística suficiente para θ.

11. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con función de densidad beta, i.e.

$$f(x \mid a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x).$$

   (a) Encuentra una estadística suficiente para (a, b).
   (b) Si $a = b = \theta$, encuentra una estadística suficiente para θ, distinta de la trivial.
   (c) Si $a = b = \theta$, determina si la densidad pertenece a la familia exponencial. En caso afirmativo indica cuál sería una estadística suficiente y completa.

12. Se realizan tres experimentos binomiales independientes con número de ensayos n_1, n_2, n_3, número de éxitos X_1, X_2, X_3 y probabilidad de éxito $\alpha, \alpha + \beta, \alpha$ respectivamente.

    (a) Encuentra una estadística suficiente para $\theta = (\alpha, \beta)$, distinta de la trivial.

    (b) Encuentra el estimador de máxima verosimilitud para α y β.

13. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con función de densidad

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{2}(1 + \theta x)\mathbb{I}_{(-1,1)}(x), \quad \theta \in (-1, 1).$$

    Prueba que el estimador de θ por el método de máxima verosimilitud, $\hat{\theta}$, satisface la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{1 + \hat{\theta} X_i} = 0.$$

14. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con función de densidad pareto

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}} \mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x), \quad \alpha, \beta > 0.$$

    (a) Encuentra una estadística suficiente para $\theta = (\alpha, \beta)$.

    (b) Encuentra un estimador de $\theta = (\alpha, \beta)$ por el método de momentos.

    (c) Encuentra un estimador de $\theta = (\alpha, \beta)$ por el método de máxima verosimilitud. *Sugerencia: encuentra primero el estimador de α suponiendo que β es conocido, y viceversa.*

    (d) Encuentra un estimador de momentos de la mediana de la distribución, $\tau(\theta)$.

    (e) Encuentra un estimador de máxima verosimilitud de la mediana de la distribución, $\tau(\theta)$.