CALCULO DE PROBABILIDADES II

Tarea 2

Profesor: Luis Enrique Nieto Barajas

1. Sea X una v.a. con función de densidad
$$f(x) = \frac{1+x}{2} I_{(-1,1)}(x).$$
   - Encuentra la función de densidad de $Y = X^2$
   - Encuentra la transformación $Z = g(X)$ tal que $Z \sim \mathrm{U}(0,1)$

2. Sea $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.
   (a) Encuentra la distribución de $Y = e^X$
   (b) Calcula $\mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$

3. Sea $X \sim \mathrm{U}(-\pi/2, \pi/2)$. Encuentra la distribución de $Y = \tan(X)$.

4. Sea $X \sim \mathrm{U}(0,1)$. Encuentra la distribución de $Y = \log\{X/(1-X)\}$.

5. Sea $X \sim \mathrm{Bin}(2,p)$. Encuentra la función de densidad de $Y = (X-1)^2$.

6. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes. Encuentra la distribución de $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ cuando
   (a) $X_i \sim \mathrm{Bin}(m_i, p)$
   (b) $X_i \sim \mathrm{BN}(r_i, p)$
   (c) $X_i \sim \mathrm{Po}(\lambda_i)$
   (d) $X_i \sim \mathrm{Ga}(\alpha_i, \beta)$
   (e) $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$

7. Sea $X \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \beta)$. Muestra que $Y = \beta X \sim \mathrm{Ga}(\alpha, 1)$.

8. Un exposivo detonará si uno de n fusibles de corta vida vive más de 0.7 segundos. Se supone que la vida de cada fusible es independiente con distribución $\mathrm{U}(0,1)$. ¿Cuántos fusibles se necesitan si se quiere estar 95% seguro de que el explosivo detonará?

9. Una máquina falla cuando falla cualquiera de sus 5 componentes. El tiempo de funcionamiento de cada componente son v.a.i.i.d. exponencial con media 4 horas. Calcula la probabilidad de que la máquina funcione al menos una hora.

10. Sean X y Y v.a.i.i.d. con distribución $\mathrm{Geo}(p)$, i.e.

$$f(x) = p(1-p)^x I_{\{0,1,\ldots\}}(x).$$

    (a) Encuentra la distribución de $Z = Y - X$
    (b) Encuentra la función generadora de momentos conjunta de X y $W = X + Y$

11. Sean X y Y v.a.i.i.d. con función generadora de momentos $M_X(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$. Encuentra la función generadora de momentos conjunta de $Z = X - Y$ y $W = X + Y$.

12. Sean X y Y v.a.i.i.d. con distribución $\mathrm{U}\{1,2,3,4\}$. Encuentra la distribución de $W = X - Y$.

13. Sean X y Y v.a.i.i.d. con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{x^2} I_{[1,\infty)}(x).$$

    (a) Encuentra la distribución conjunta de $Z = XY$ y $W = X/Y$
    (b) Encuentra las distribuciones marginales de Z y W
    (c) Encuentra la distribución conjunta de $U = X + Y$ y $V = X - Y$

14. Sean X y Y v.a.i.i.d. $\mathrm{Exp}(\theta)$, i.e.

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x).$$

    (a) Encuentra la distribución conjunta de $Z = X/Y$ y $W = X + Y$
    (b) Encuentra las distribuciones marginales de Z y W

15. Sean X y Y v.a.i.i.d. $\chi^2_{(2)} = \mathrm{Ga}(1, 1/2)$.

    (a) Encuentra la distribución de $Z = (X - Y)/2$.
    (b) Calcula $P(|Z| > 1)$

16. Sean (X, Y) un v.a. con distribución conjunta dada por

$$f(x, y) = 2e^{-(x+y)} I_{[0,y]}(x) I_{[0,\infty)}(y).$$

   (a) Encuentra la distribución conjunta de X y $X + Y$
   (b) En cuentra las distribuciones marginales de X y $X + Y$

17. Sea (X, Y) un va. con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = 3x I_{(0,x)}(y) I_{(0,1)}(x).$$

   (a) Encuentra la transformación $Z = G(X)$ tal que $Z \sim \mathrm{U}(0, 1)$
   (b) Encuentra la transformación $W = h(Y)$ tal que $W \sim \mathrm{U}(0, 1)$
   (c) Encuentra la distribución de $X + Y$

18. Sean X_1, X_2, X_3 v.a.i.i.d. $\mathrm{Po}(\lambda)$. Encuentra la distribución condicional de X_1 dado $X_1 + X_2 + X_3$.

19. Sean X_1, X_2, X_3 v.a.i.i.d. $\mathrm{U}(0, 1)$. Sean $Y_1 = X_{(1)}$, $Y_2 = X_{(2)}$ y $Y_3 = X_{(3)}$ las estadísticas de orden. La función de densidad conjunta de (Y_1, Y_2, Y_3) está dada por

$$f(y_1, y_2, y_3) = 3! I(0 < y_1 < y_2 < y_3 < 1).$$

   (a) Encuentra la distribución marginal de (Y_1, Y_2)
   (b) Encuentra la distribución condicional de Y_3 dado $Y_2 = y_2$ y $Y_1 = y_1$
   (c) Calcula $P(X_1 > X_2 X_3)$

20. Sean X_1, X_2, X_3 v.a.i.i.d. $\mathrm{Exp}(\theta)$. Sean $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_1 + X_2$ y $Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$.

   (a) Encuentra la distribución conjunta de (Y_1, Y_2, Y_3)
   (b) Encuentra la distribución marginal de Y_2

21. Sean X_1, X_2, X_3 v.a.i.i.d. $\mathrm{Exp}(\theta)$. Sean $Y_1 = X_1/(X_1+X_2)$, $Y_2 = (X_1+X_2)/(X_1+X_2+X_3)$ y $Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$. Encuentra la función de densidad conjunta de (Y_1, Y_2, Y_3) y determina si hay independencia entre las v.a.s Y_i's.

22. Sea $W = \sum_{i=1}^{N} X_i$, donde $X_i \sim \mathrm{Exp}(\theta)$ independientes para $i = 1, 2, 3$. Sea N otra v.a. independiente de las X_i's tal que $N \sim \mathrm{U}\{1, 2, 3\}$.

   (a) Encuentra la distribución de W
   (b) Calcula $\mathrm{Var}(W)$