

CALCULO DE PROBABILIDADES I

Tarea 3

1. Cualquier punto en el intervalo $[0,1)$ puede ser representado por su expansión decimal $.x_1x_2\dots$. Suponga que un punto es elegido aleatoriamente en el intervalo $[0,1)$. Sea X el primer dígito en la expansión decimal del punto. Encuentre la función de densidad de X y construya una grafica de la misma.
2. Una caja contiene 6 pelotas rojas y 4 pelotas negras. Se seleccionan en forma aleatoria n pelotas. Sea X el número de pelotas rojas seleccionadas. Encuentre la función de densidad de X si la selección se realizó,
 - a) sin reemplazo. Grafique esta función para $n = 8$.
 - b) con reemplazo. Grafique esta función para $n = 8$.

3. Sea N un entero positivo y sea f una función dada por

$$f(x) = \begin{cases} c 2^x, & x = 1, 2, \dots, N \\ 0, & \text{e. o. c.} \end{cases}$$

Encuentre el valor de c tal que $f(x)$ sea función de densidad.

4. Suponga que X es una variable aleatoria con función de densidad dada por

x	-3	-1	0	1	2	3	5	8
$f(x)$	0.1	0.2	0.15	0.2	0.1	0.15	0.05	0.05

Encuentre las probabilidades de los siguientes eventos:

- a) X es negativa.
 - b) X es impar.
 - c) X toma valores entre 1 y 8 (incluyendo los extremos).
 - d) $P(X = -3 \mid X \leq 0)$.
 - e) $P(X \geq 3 \mid X > 0)$.
5. Una caja tiene 12 pelotas numeradas de 1 a 12. Dos pelotas son seleccionadas aleatoriamente de la caja. Sea X el número más grande de las dos pelotas. Encuentre la densidad de X si las bolas son seleccionadas:
 - a) con reemplazo. Grafique esta densidad.
 - b) sin reemplazo. Grafique esta densidad.
 6. Una caja contiene r bolas numeradas $1, 2, \dots, r$. Se seleccionan n bolas sin reemplazo de la caja. Sea Y el número más grande de las bolas seleccionadas en la muestra y Z el número más chico.
 - a) Encuentre $P(Y \leq y)$.
 - b) Encuentre $P(Z \geq z)$.
 7. Un dado se tira hasta que un 6 aparece.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más el dado se tire 6 veces?
 - b) ¿Cuántos tiros se necesitan para que la probabilidad de obtener un 6 sea al menos 0.5?
 8. Sea X una variable aleatoria tal que $P(|X - 1| = 2) = 0$. Expresé $P(|X - 1| \geq 2)$ en términos de la función de distribución acumulada $F_X(x)$.
 9. Un punto es seleccionado aleatoriamente del interior de un disco de radio R en el plano. Sea X el cuadrado de la distancia del punto al centro del disco. Encuentre la función de distribución acumulada y la función de densidad de X , construya las gráficas de estas funciones.
 10. Considere un triángulo equilátero con lados de longitud s . Un punto es seleccionado aleatoriamente de uno de los lados del triángulo. Sea X la distancia del punto escogido al vértice opuesto. Encuentre la función de distribución acumulada de X y construya su gráfica. Calcule la función de densidad de X y gráfíquela.

11. Sea (u,v) un punto escogido aleatoriamente del cuadrado $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$. Sea X la variable aleatoria que asigna al punto (u,v) el valor $u+v$.

- Encuentre la función de distribución acumulada de X y demuestre formalmente que cumple todas las propiedades requeridas.
- Encuentre la función de densidad de X y grafíquela.

12. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución acumulada está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ x/3 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ x/2 & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Encuentre

- $P(1/2 \leq X \leq 3/2)$
- $P(1/2 \leq X \leq 1)$
- $P(1/2 \leq X < 1)$
- $P(1 \leq X \leq 3/2)$
- $P(1 < X < 2)$
- Encuentre $f(x)$ y grafique esta función.

13. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad está dada por:

$$f(x) = (1/2)e^{-|x|}; \quad -\infty < x < \infty$$

- Encuentre $P(1 \leq |x| \leq 2)$.
- Encuentre $F(x)$ (función de distribución acumulada).

14. Sea $F(x)$ la función de distribución acumulada dada por

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2(|x|+1)} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

Encuentre la función de densidad, $f(x)$, correspondiente. ¿Para qué valor de x , $F'(x) = f(x)$?

15. Sea X el seno del ángulo escogido aleatoriamente del intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Encuentre la función de densidad y la función de distribución de X . Grafique estas funciones.

16. Sea X una variable aleatoria continua que tiene función de distribución F y función de densidad f . La función de densidad f es simétrica con centro en a si $f(a+x) = f(a-x)$, $-\infty < x < \infty$. Encuentre las condiciones equivalentes en términos de la función de distribución acumulada.

17. a) Demuestre que las siguientes son funciones de densidad:

$$f_1(x) = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$f_2(x) = 2e^{-2x} I_{(0,\infty)}(x)$$

$$f(x) = (\theta+1)f_1(x) - \theta f_2(x) \quad , \quad 0 < \theta < 1$$

- Pruebe la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones de densidad y si los valores θ_1 y θ_2 son tales que $\theta_1 + \theta_2 = 1$, entonces $\theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x)$ es también una función de densidad.

18. Encuentre la constante k tal que la siguiente función sea una función de densidad:

$$f(x) = kx^2 I_{(-k,k)}(x).$$

19. Un experimento consiste en lanzar 2 bolas en 4 cajas de tal manera que cada bola tiene la misma probabilidad de caer en cada caja. Sea X el número de bolas en la primera caja.

- ¿Cuál es la función de distribución acumulada de X ? Construya su gráfica.
- ¿Cuál es la función de densidad de X , y cuál es su gráfica?

20. Una moneda honesta es lanzada hasta que un sol aparece. Sea X el número de lanzamientos requeridos.

Encuentre la función de densidad de X y haga una grafica de la misma.

21. El individuo A tiene dos monedas y el individuo B tiene una. Ellos juegan volados hasta que uno de los dos tiene las 3 monedas. Sea X el número de volados requeridos para que el juego se acabe.

- a) ¿Cuál es la función de densidad de X?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que B gane el juego?

22. Sea $f_X(x) = (1/\beta)[1 - |(x-\alpha)/\beta|] I_{(\alpha-\beta, \alpha+\beta)}(x)$, $-\infty < \alpha < \infty$, $\beta > 0$

- a) Demuestre que $f_X(x)$ es una función de densidad. ¿Cómo es la gráfica de esta función para distintos valores de α y β ?
- b) Encuentre la función de distribución acumulada correspondiente.

23. Un avión con bombas vuela directamente arriba de una vía de tren. Si una bomba de las grandes (pequeñas) cae a menos de 40 (15) pies de la vía, ésta se dañará lo suficiente para que el tráfico se interrumpa. Sea X la distancia perpendicular de la vía al punto de caída de la bomba. Suponga que:

$$f_X(x) = \frac{100-x}{5000} I_{(0,100)}(x)$$

- a) Encuentre la probabilidad de que una bomba de las grandes interrumpa el tráfico.
- b) Si el avión puede cargar 3 bombas grandes (8 pequeñas) y usa las tres (ocho), ¿cuál es la probabilidad de que se interrumpa el tráfico?
- c) Si el avión lleva tres bombas grandes y Y es el número de bombas que dañan la vía, encuentre $f_Y(y)$.

24. Una urna contiene pelotas numeradas 1,2,3. Primero se toma una pelota de la urna, luego una moneda se lanza el número de veces que dice la bola. Sea X la variable aleatoria que indica el número de soles. Encuentre la función de densidad de X.

25. Dada la función de distribución acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x^2 + 0.2, & 0 \leq x < 0.5 \\ x & , 0.5 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Expresé F(x) en términos de funciones indicadoras y construya su gráfica.
- b) Obtenga f(x) y construya su gráfica.
- c) Calcule $P(0.25 < X < 0.75)$
- d) Calcule $P(0.25 < X < 0.5)$.

26. Sea $F_X(x) = [1 - \exp\{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^\gamma\}] I_{(\alpha, \infty)}$, $\alpha \in \mathfrak{R}$, $\beta, \gamma \in \mathfrak{R}^+$ Verifique que F(x) es una función de distribución acumulada.

27. Sea $f_X(x) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}$, $x = 0,1,2, \dots$, $\theta > 0$. Demuestre que $f_X(x)$ es una función de densidad.

28. El número de solicitudes de apertura de crédito que se reciben diariamente en una tienda departamental, es una variable aleatoria W con la siguiente función de distribución acumulada,

$$F(w) = \begin{cases} 0 & , w < 0 \\ 0.1 & , 0 \leq w < 1 \\ 0.3 & , 1 \leq w < 2 \\ 0.7 & , 2 \leq w < 4 \\ 1 & , w \geq 4 \end{cases}$$

- a) Encuentre la probabilidad de que se reciban dos o más solicitudes en un día.
- b) Dado que ya se recibió al menos una solicitud, ¿cuál es la probabilidad de que al final del día se hayan recibido tres o menos solicitudes?
- c) Encuentre la función de densidad de W.