ESTADISTICA MATEMATICA

Tarea 3

PROFESOR: LUIS ENRIQUE NIETO BARAJAS

1. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.i.i.d. con función de densidad Pareto

$$f(x | \alpha, \beta) = \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}} \mathbb{I}_{[\alpha, \infty)}(x), \quad \alpha, \beta > 0.$$

- (a) Encuentra los estimadores máximo verosímiles de α y β .
(b) Demuestra que el cociente de verosimilitudes generalizado para las hipótesis

$$H_0 : \beta = 1, \alpha > 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta \neq 1, \alpha > 0$$

tiene región crítica de la forma $\mathcal{C} = \{\underline{x} : T(\underline{x}) \leq k_1 \text{ ó } T(\underline{x}) \geq k_2\}$, donde $0 < k_1 < k_2$ y

$$T(\underline{X}) = \log \left\{ \frac{\prod_{i=1}^n X_i}{(X_{(1)})^n} \right\}$$

2. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.i.i.d. de una distribución $Po(\lambda)$, $\lambda > 0$.

- (a) Encuentra una prueba de hipótesis para probar $H_0 : \lambda \geq \lambda_0$ vs. $H_1 : \lambda < \lambda_0$.

Supongamos que en cierta ciudad el número de accidentes automovilísticos en un año sigue una distribución Poisson. El promedio histórico de accidentes es de 15 accidentes por año.

- (b) Considerando que este año el número de accidentes sea de 10, i.e. $n = 1$, ¿Será justificado decir que la tasa de accidentes ha bajado? Calcula el valor p.
(c) Si el número de accidentes del próximo año fuera de 11, considerando la información de este y del próximo año ($n = 2$), ¿se podría decir que la tasa de accidentes ha disminuido? Calcula el valor p.

Para los siguientes incisos suponga $n = 10$ y que para probar las hipótesis $H_0 : \lambda = 0.1$ vs. $H_1 : \lambda = 0.5$ se usa la región crítica $\mathcal{C} = \{\underline{x} : \sum_{i=1}^{10} X_i \geq 3\}$

- (d) Calcula el tamaño de la prueba

- (e) Calcula el tamaño de error tipo 2.
- (f) Si para una muestra se observa que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 4$, calcula el valor p y determina cuál sería tu decisión.

3. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.i.i.d. de una distribución $Ber(\theta)$, $\theta \in [0, 1]$.

- (a) Encuentra una prueba de hipótesis para probar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
- (b) En 20 lanzamientos de una moneda se obtuvieron 8 soles y 12 águilas. ¿Será razonable asumir que la moneda es honesta? Justifica tu respuesta usando el valor p.
- (c) En 100 lanzamientos de una moneda se obtuvieron 40 soles y 60 águilas. ¿Será razonable asumir que la moneda es honesta? Justifica tu respuesta usando el valor p.

Para los siguientes incisos suponga $n = 10$ y que para probar las hipótesis $H_0 : \theta \leq 1/2$ vs. $H_1 : \theta > 1/2$ se usa la región crítica $\mathcal{C} = \{\underline{x} : \sum_{i=1}^{10} x_i \geq 8\}$

- (d) Calcula el tamaño de la prueba
- (e) Evalua la potencia de la prueba cuando en realidad $\theta = 0.7$.
- (f) Si para una muestra se observa que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 9$, calcula el valor p y toma tu decisión con $\alpha = 0.01$.

4. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.i.i.d. con función de densidad

$$f(x | \theta) = (1 + \theta)x^\theta \mathbb{I}_{(0,1)}(x), \quad \theta > -1.$$

Encuentra la prueba dada por el cociente de verosimilitudes generalizado para probar las hipótesis

$$H_0 : \theta \leq 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta > 0.$$

Especifica claramente el valor del punto crítico para que la prueba tenga tamaño α .

5. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.i.i.d. con función de densidad

$$f(x | \theta) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x), \quad \theta > 0.$$

- (a) Encuentra la prueba dada por el cociente de verosimilitudes simple para probar las hipótesis $H_0 : \theta = 1/2$ vs. $H_1 : \theta = 1$. Especifica claramente el valor del punto crítico para que la prueba tenga tamaño α .
- (b) Encuentra la prueba dada por el cociente de verosimilitudes generalizado para probar las hipótesis $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs. $H_1 : \theta < \theta_0$. Especifica claramente el valor del punto crítico para que la prueba tenga tamaño α .

Para los siguientes incisos suponga que $n = 1$ y que se quieren probar las hipótesis $H_0 = \theta \geq 3$ vs. $H_1 : \theta < 3$ con la región de rechazo $CC = \{x : x < 1/2\}$.

- (c) Grafica la potencia de la prueba.
 - (d) Calcula el tamaño de la prueba.
 - (e) Suponga que el valor observado de X fue $1/3$. Calcula el valor p y toma tu decisión con $\alpha = 0.01$.
6. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.i.i.d. con función de densidad $U[0, \theta/2]$, $\theta > 0$. Encuentra la prueba dada por el cociente de verosimilitudes generalizado para probar las hipótesis

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta < \theta_0.$$

Especifica claramente el valor del punto crítico para que la prueba tenga tamaño α .

7. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.i.i.d. con función de densidad $U[\theta, \theta + 1]$. Para probar las hipótesis $H_0 : \theta = 0$ vs. $H_1 : \theta > 0$ se tienen dos pruebas competidoras:

$$\text{Prueba 1 : } \mathcal{C} = \{x_1 > 0.95\}$$

$$\text{Prueba 2 : } \mathcal{C} = \{x_1 + x_2 > k\}$$

- (a) Calcula el tamaño de la prueba 1.
- (b) Encuentra el valor de k tal que la prueba 2 tenga el mismo valor de α que la prueba 1. Sugerencia: si $Y = X_1 + X_2$, entonces

$$f_y(y) = (y - 2\theta)\mathbb{I}_{[2\theta, 2\theta+1]}(y) + (2\theta + 2 - y)\mathbb{I}_{[2\theta+1, 2\theta+2]}(y)$$

- (c) Evalua la potencia de las pruebas 1 y 2 cuando en realidad $\theta = 1/2$.
 - (d) Con base en el resultado del inciso anterior determina cuál de las dos pruebas es más potente.
8. Un investigador afirma que un medicamento provocará sueño en por lo menos el 80% de las personas que padecen insomnio. Después de un análisis de éste, alguien considera que la afirmación es exagerada y para refutarla se administra la medicina a 20 personas elegidas al azar que padecen insomnio. Sea Y el número de personas que logran dormir con la medicina.
- (a) Platea las hipótesis correspondientes.
 - (b) Calcula el tamaño de la prueba si la región de rechazo es $\{y : y \leq 12\}$.
 - (c) Calcula la potencia de la prueba cuando en realidad la proporción de personas que logran dormir con el medicamento es de 40%.

- (d) Si la región de rechazo es $\{y : y \leq k\}$, encuentra el valor de k tal que $\alpha = 0.01$.
- (e) Para la región de rechazo del inciso anterior, encuentra β (tamaño de error tipo 2) si en realidad el número de personas que logran dormir con el medicamento es de 60%.
9. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a.i.i.d. de la distribución $N(\mu, 9)$. Considera las hipótesis $H_0 : \mu \leq 1$ vs. $H_1 : \mu > 1$ y suponga que la prueba tiene región de rechazo $\mathcal{C} = \{\underline{x} : \bar{x} \geq k\}$. Encuentra en valor de n y de k talq ue la probabilidad de rechazar H_0 cuando $\mu = 0.8$ sea de 0.05 y la probabilidad de no rechazar H_0 cuando $\mu = 1.2$ es de 0.10.
10. Considera una población normal de longitudes de barras metálicas cuya desviación estándar es de 0.10cm. Un comprador desea demostrar (sobre la base de una muestra tomada al azar de barras de un lote) la hipótesis nula de que la longitud media real de la barra es de 4cm, contra la hipótesis alternativa de que es menor a 4cm. Las consecuencias de rechazar la hipótesis nula si ésta es verdadera y de no rechazarla si la longitud media es en realidad 3.95cm se consideran igualmente graves y sus riesgos se fijan en 0.02 (es decir, $\alpha = \beta(3.95) = 0.02$). Encuentra el valor crítico y el tamaño de muestra necesario para que esto se cumpla.
11. Una muestra de 500 mediciones del tiempo de estancia de pacientes en un determinado hospital público, dió media de 5.4 días y una desviación estándar de 3.1 días. De acuerdo con la ley federal de hospitales se cree que la estancia promedio de un paciente en un hospital es de más de 5 días. ¿Se podría pensar que este hospital cumple con la ley?.
- (a) Plantea el problema como una prueba de hipótesis. Calcula el valor p y concluye tomando un $\alpha = 0.05$.
- (b) Determina el tamaño de muestra necesario para probar $H_0 : \mu = 5$ vs. $H_1 \mu = 6$, de tal manera que $\alpha = 0.01$ y $\beta = 0.05$.
12. Un ensayo clínico de 2 etapas está planeado para probar $H_0 : \theta = 0.10$ vs. $H_1 : \theta > 0.10$, donde θ es la proporción de pacientes que responden positivamente a cierto tratamiento (protocolo). En la primera etapa, se reclutan a 15 pacientes y se les trata. Si 4 o más pacientes (de los 15) responden positivamente, se rechaza H_0 , se termina el estudio y ningún otro paciente es reclutado. De otra forma, otro grupo de 15 pacientes son reclutados y tratados en la segunda etapa. Si un total de 6 o más pacientes (de los 30 pacientes reclutados en ambas etapas) responden positivamente, se rechaza H_0 . Por ejemplo, si 5 pacientes responden positivamente en la primera etapa, H_0 es rechazada y se termina el estudio. Sin embargo, si 2 pacientes responden positivamente de los primeros 15 pacientes, otros 15 pacientes de segunda etapa son reclutados y si

adicionalmente 4 o más responden positivamente (dando un total de 6 o más dentro de los 30 pacientes), se rechaza H_0 y se termina el estudio.

- (a) Encuentra el tamaño de la prueba.
 - (b) Encuentra la potencia cuando $\theta = 0.3$.
 - (c) Encuentra el tamaño de error tipo 2 si $\theta = 0.3$.
13. Se sospecha que los anticonceptivos orales reducen el nivel de hemoglobina del usuario. En un estudio de sangre en una muestra de 37 mujeres que reportaron estar tomando anticonceptivos orales, se obtuvo una media de 14.491 ml y una desviación estándar de 1.079 ml en el nivel de hemoglobina. Si el nivel medio normal es de 14.9 ml, ¿hay razón para sustentar la sospecha? Plantea las hipótesis y los supuestos necesarios y justifica tu respuesta usando un valor $\alpha = 0.05$.
14. La dirección del Banco del Ahorro desea saber si existe o no diferencia estadística en los promedios de ahorros mensuales de dos de sus sucursales (A y B). Para tal efecto se seleccionaron aleatoriamente 12 y 16 cuentahabientes de las sucursales A y B respectivamente. Cada persona entrevistada declaró el monto de sus ahorros en el último mes. Los datos obtenidos son los siguientes:

Sucursal A : 4.51, 1.4, 2.8, 0.75, 1.85, 5.4, 3.2, 2.75, 3.3, 0.9, 1.1, 1.9

Sucursal B : 3.2, 4.1, 3.8, 2.7, 3.1, 4.2, 2.3, 1.7, 1.9, 0.7, 3.3, 1.4, 4.0, 3.8, 4.3, 2.31

Establece los supuestos necesarios y prueba las siguientes hipótesis con un tamaño de prueba de $\alpha = 0.10$.

- (a) $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ vs. $H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$.
 - (b) $H_0 : \mu_A = \mu_B$ vs. $H_1 : \mu_A < \mu_B$.
15. Un fabricante desea comparar el proceso actual de armado para uno de sus productos con un método propuesto que supuestamente reduce el tiempo de armado. Se les pidió a 8 trabajadores de la planta que armaran las unidades con ambos procesos. Enseguida se presentan los tiempos observados en minutos:

Trabajador	1	2	3	4	5	6	7	8
P. Actual	38	32	41	35	42	32	45	37
P. Propuesto	30	32	34	37	35	26	38	32

¿Existirá alguna razón para creer que el tiempo de armado para el proceso actual es mayor que el del método propuesto por más de dos minutos?

- (a) Establece las hipótesis y los supuestos necesarios.

- (b) Realiza la prueba con un nivel de significancia de 0.05.
- (c) Calcula el nivel de significancia descriptivo (valor p) e interpreta su valor.