CALCULO DE PROBABILIDADES I

Tarea 4

$$X\sim Bin(n,p) \Leftrightarrow f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}I_{\{0,1,\dots,n\}}(x);\;\; X\sim BN(r,p)\Leftrightarrow f(x)=\binom{r+x-1}{x}p^r(1-p)^xI_{\{0,1,\dots\}}(x);$$
$$X\sim Po(\lambda)\Leftrightarrow f(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}I_{\{0,1,\dots\}}(x);\;\; X\sim U\{0,1,\dots,n\}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{n+1}I_{\{0,1,\dots,n\}}(x);$$
$$X\sim U(a,b)\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{b-a}I_{(a,b)}(x);\;\; X\sim Exp(\theta)\Leftrightarrow f(x)=\theta e^{-\theta x}I_{(0,\infty)}(x)$$
$$X\sim Ga(a,b)\Leftrightarrow f(x)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}I_{(0,\infty)}(x), \text{ donde } \Gamma(a)=(a-1)\Gamma(a-1)$$

1. Sea $f_X(x)=\frac{1}{2}\{\theta\, I_{(0,1)}(x)+I_{[1,2]}(x)+(1-\theta)I_{(2,3)}(x)\}$, donde $0\le\theta\le 1$.
   a) Encuentre la función de distribución acumulada de X.
   b) Encuentre la media, la moda, la mediana y la varianza de X.

2.a) Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2 . Demuestre que E $\{(X - b)^2\}$, como función de b, se minimiza cuando b = μ .
   b) Sea X una variable aleatoria contínua con mediana m. Minimize E{| X – b|} como función de b.
   HINT : Demuestre que $E\{|X-b|\}=E\{|X-m|\}+2\int_b^m (x-b)f_X(x)\,dx$

3. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por $f_X(x)=|1-x|I_{[0,2]}(x)$.
   Encuentre la media y la varianza de X. Calcula E(X | X >1).

4. Preguntas varias.
   a) Sea X una variable aleatoria que tiene una distribución Bin (25, 0.2). Evalúe P(X < μ - 2σ).
   b) Si X se distribuye uniforme en el intervalo (1,2), encuentre z tal que P(X > z + μ) = 1/4.
   c) Suponga que X se distribuye Bin(n,p) y que E(X) = 5 y Var(X) = 4. Encuentre n y p.
   d) Si E(X)=10 y σ =3, ¿puede X tener una distribución Binomial negativa?.
   e)Suponga que X se distribuye Bi(n,p). ¿Para qué valor de p se maximiza la varianza de X (n se mantiene fijo)?
   f) Suponga que X es una variable aleatoria continua con distribución uniforme con media 1 y varianza 4/3. ¿Cuál es P(X < 0)?

5. Encuentre la mediana para cada una de los siguientes distribuciones:
   a) X se distribuye Exp(λ).
   b) X se distribuye uniforme en el intervalo (θ_1,θ_2).
   c) X se distribuye Bin(4, 0.5).
   d) X se distribuye Bin(5, 0.5).
   e) X se distribuye Bin(2, 0.9).

6. Si X tiene una distribución Poisson con media 1, demuestre que E{|X – 1|} = 2σ/e.

7. Sea N un entero positivo y sea f(x) la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{N(N+1)} &, \quad x=1,2,\dots,N,\\ 0 &, \quad \text{e.o.c.}\end{cases}$$

   Demuestre que f(x) es una función de densidad y encuentre su valor esperado.

8. Sea X ~ Bin(4,p). Encuentre E{sen(πX/2)}.

9. Sea X ~ Po(λ).
   a) Encuentre E$\{(1+X)^{-1}\}$.
   b) Encuentre E(X | X es impar).

10. Sea X ~ U{0,1,...,N}. Encuentre la media y la varianza de X. Calcula E(X | X $\le$ N–1).

11. Sea $f_X(x) = (1/\beta)[1 - |(x-\alpha)/\beta|]\, I_{(\alpha-\beta,\alpha+\beta)}(x), \quad -\infty < \alpha < \infty, \quad \beta > 0$

   a)Encuentre el valor esperado, la desviación estándar y la moda de X.
   b)Determinar el cuantil de orden q de esta distribución.

12. Una palabra de la siguiente frase es elegida al azar.

SI PODEMOS HACER A ALGUIEN MAS ALEGRE Y FELIZ,
DEBERIAMOS HACERLO EN CUALQUIER CASO.

   Si X denota el número de letras de la palabra elegida, ¿cuál es el valor esperado, la moda, la mediana y la desviación estándar de X?

13. Sea X una v.a. con función de distribución acumulada dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , y \leq 0 \\ y/8 & , 0 < y < 2 \\ y^2/16 & , 2 \leq y < 4 \\ 1 & , y \geq 4 \end{cases}$$

   a)Obtenga la media, la varianza y los coeficientes de variación, de asimetría y de kurtosis de X.
   b)Obtenga los cuartiles de X
   c)Si U = 5 - 3 X + 2 X^2 , encuentre E(U) y V(U).