Instituto Tecnológico Autónomo de México
Departamento Académico de Economía
Economía III

Preferencias y utilidad del consumidor.

ME. Claudia Aburto Rancaño.
Lic. Daniel Gutiérrez R. [1]

[1]Los autores agradecen los comentarios del Prof Esteban Colla. Los errores permanecen como responsabilidad de los autores.

CAPÍTULO I. PREFERENCIAS Y UTILIDAD DEL CONSUMIDOR

i) Axiomas de la elección racional. 3
- a) Axioma de Completitud 4
- b) Axioma de Transitividad 4
- c) Axioma de Continuidad 5

ii) Utilidad 7
- a) Utilidad total y utilidad marginal 7
- b) Monotonicidad .... **¡Error! Marcador no definido.**

iii) Intercambio voluntario y sustitución. 10
- a) Curva de indiferencia 10
- b) Tasa Marginal de Sustitución 11
  - i) Definición en términos de la pendiente de la curva de indiferencia 11
  - ii) Definición de *TMS* utilizando utilidades marginales 14
- c) Transformaciones Monotónicas 19
- d) Características de las curvas de indiferencia 21
  - i) Mapa denso 21
  - ii) No se cruzan (transitividad) 21
  - iii) Monotonicidad estricta (Insaciabilidad) 22
  - iv) Pendiente negativa 22
  - v) Estrictamente convexas al origen 22
- e) Algunos casos especiales de curvas de indiferencia 23
  - i) Un mal y un bien 23
  - ii) Bienes Neutros a la utilidad 26
- f) Función de utilidad Cobb-Douglas 27
  - i) Características de una función de utilidad Cobb-Douglas 28
- g) Función de utilidad cuasi-lineal 30
- h) *CES* y sus casos especiales 33
  - i) Grado de Homogeneidad 33
  - ii) Tasa Marginal de Sustitución 34
  - iii) Elasticidad de sustitución 34
  - iv) Comportamiento de la *TMS* 35

iv) Ejemplos y ejercicios adicionales 41

CAPÍTULO I. PREFERENCIAS Y UTILIDAD DEL CONSUMIDOR

En periodos tempranos, la ley de la demanda estaba fundamentada en supuestos que no poseían sustento en la realidad. En la teoría clásica de Edgeworth (1848-1926), Mill (1806-1873) y otros miembros de la escuela utilitarista, la utilidad era entendida como un indicador del bienestar general de las personas que podía ser medido y comparado entre individuos. Adicionalmente, el principio de la utilidad marginal decreciente era considerado como un fenómeno más bien psicológico, del cual dependía fuertemente la ley de la demanda.[2]

No fue sino hasta finales del siglo XIX, cuando los economistas fueron descartando esta idea, al reformular la teoría de la conducta del consumidor en función de las preferencias individuales, descartando supuestos y tratando de mantener una teoría congruente con capacidad de predicción. Pareto (1848-1923), comprobó que el hecho de que la utilidad tuviera que medirse no era esencial para la teoría de la demanda; por otra parte Slutsky (1880-1948) realizó un estudio profundo sobre la teoría de la demanda sin el concepto de utilidad medible y, por su parte, Hicks (1904-1989) demostró que el principio de la utilidad marginal decreciente no era condición necesaria ni suficiente para que se cumpliera la ley de la demanda. Finalmente Debreu (1921-2004) ofreció la teoría moderna del consumidor.[3]

i) Axiomas de la elección racional.

Existen dos distintos enfoques para modelar el comportamiento del consumidor; el primero está basado en las preferencias del consumidor, asumiendo que éste posee una relación de preferencias sobre un conjunto de elecciones y que satisface ciertos axiomas de la elección racional. Este es el enfoque en el que nos basaremos en este curso; sin embargo, hay que tomar en cuenta que las preferencias no son observables y por ello, en diversas ocasiones se considera un segundo enfoque basado en las elecciones del consumidor (las cuales sí son observables), añadiendo un elemento de consistencia en el comportamiento del consumidor.

En la teoría moderna del consumidor, la relación de preferencias juega un papel crucial al especificar la consistencia o inconsistencia de las decisiones que toma el consumidor en situaciones que involucran una elección. De esta manera, cuando un sujeto declara que "*A* es preferido a *B*", significa que está mejor con *A* que con *B*.

La relación de preferencias posee tres axiomas básicos, los cuales pretender dar una explicación formal a los aspectos fundamentales del comportamiento del consumidor y acerca de los objetos de su elección. Estas tres propiedades formalizan el punto de vista de que el consumidor puede elegir en cualquier situación y que sus elecciones son congruentes y consistentes, garantizando que las preferencias de los individuos sean racionales.
Formalmente, representamos las preferencias del consumidor mediante una relación binaria $\succeq$ definida sobre el espacio de elecciones de consumo $x,y \in \Re^n_+$, tan sólo requerimos que el

[2] Jehle, Geoffrey y Reny, Phillip, *Advanced Microeconomic Theory*, 2nd edition, p. 5
[3] Loc. cit.

individuo examine dos distintas opciones de consumo al mismo tiempo y elija alguna de ellas.

a) Axioma de Completitud

El *axioma de completitud* formaliza la noción de que el consumidor conoce sus preferencias y puede hacer comparaciones al momento de elegir. En particular, este primer axioma nos dice que si el consumidor tiene acceso a dos canastas de consumo *A* y *B*, puede decidir entre cualquiera de las siguientes situaciones:

Para cualquier par de canastas *A* y *B*:

1. *A* es preferido a *B* ($A \succ B$),

   ó

2. *B* es preferido a *A* ($B \succ A$),

   ó

3. *A* y *B* son igualmente preferidos ($A \sim B$)

Lo importante es que bajo este axioma, el consumidor siempre puede ordenar las canastas; es decir, no se queda detenido ante la indecisión.

b) Axioma de Transitividad

El *axioma de transitividad* llega al corazón mismo de la racionalidad del consumidor, ya que requiere que éste sea capaz de comparar entre dos alternativas en un momento dado y garantiza que dichas comparaciones sean consistentes y congruentes.

Por ejemplo, si un individuo declara que "*A* es preferido a *B*" y que "*B* es preferido a *C*", entonces como consecuencia debería declarar que "*A* es preferido a *C*".

$$\boxed{\text{Si: } A \succ B \text{ y } B \succ C \Rightarrow A \succ C}$$

De la misma manera, se dice que si un individuo es indiferente entre *A* y *B* y al mismo tiempo es indiferente entre *B* y *C*, entonces deberá ser también indiferente entre *A* y *C*.

$$\boxed{\textit{Si: } A \sim B \text{ y } B \sim C \Rightarrow A \sim C}$$

c) Axioma de Continuidad

El *axioma de continuidad* garantiza la no ocurrencia de reveses repentinos en las preferencias; es decir, que si un individuo reporta que "*A* es preferido a *B*", entonces al enfrentarse ante una situación cercana o parecida a *A*, ésta deberá ser preferida a situaciones cercanas o parecidas a *B*.

Ejemplos:

Axioma de completitud

- Un individuo puede escoger:

  * Entre dos equipos de fútbol soccer (*Real Madrid* o el *Barcelona*)
  * Entre dos fragancias de perfume (*Armani* o *Burberry*)
  * Entre dos películas en cartelera (*Cenicienta* o *Blancanieves*)

De esta forma, si le preguntáramos a un individuo si prefiere ir al cine o al teatro y no pudiera decir qué opción le resulta más preferible; entonces estaríamos ante un caso de preferencias no completas y el sujeto estaría paralizado en la indecisión.

Es importante apuntar que no se requiere medir la utilidad que cada conjunto de bienes le produce al consumidor, sino que éste tan sólo necesita compararlos y ordenarlos de acuerdo con sus preferencias. Asimismo, se debe observar que estas preferencias no consideran los costos; por ejemplo, el individuo puede preferir una fragancia *Armani* a una *Burberry*, pero adquirir la segunda porque es más económica (esto se analizará más adelante).

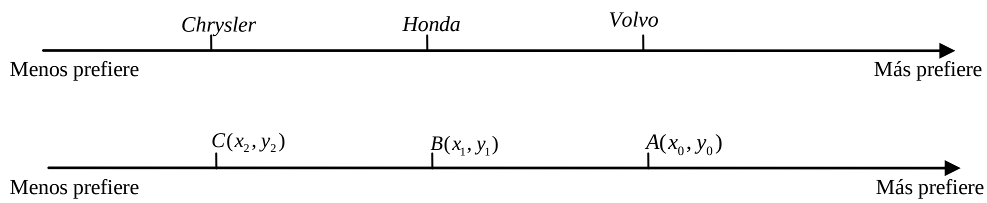
Axioma de transitividad

- Si un individuo prefiere:

  * Un automóvil *Volvo* a un *Honda* y a su vez un *Honda* a un *Chrysler*, entonces también prefiere un *Volvo* a un *Chrysler*.
  * Una canasta $A(x_0, y_0)$ a una canasta $B(x_1, y_1)$ y a su vez una canasta $B(x_1, y_1)$ a una canasta $C(x_2, y_2)$, entonces también preferirá una canasta $A(x_0, y_0)$ a una canasta $C(x_2, y_2)$.

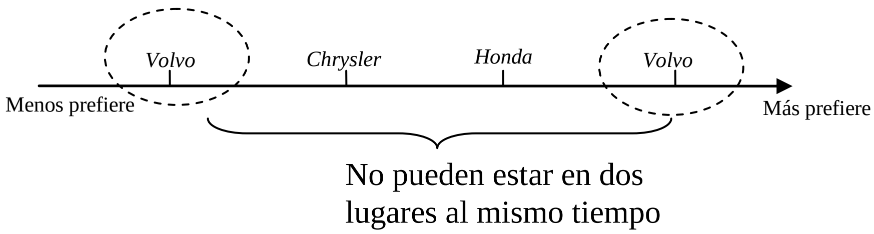
En las rectas ilustradas en la Gráfica 1.1, se representan los dos ejemplos anteriores:

Gráfica 1.1



Por otra parte, en la Gráfica 1.2, se ilustra la forma en que se verían las preferencias no transitivas:

Gráfica 1.2



Volvo $\succ$ Honda
Honda $\succ$ Chrysler
Chrysler $\succ$ Volvo

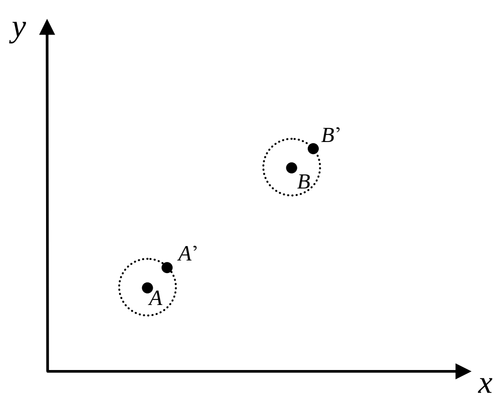
Axioma de continuidad

- Si un individuo prefiere:

  * Una *Pepsi* de 350 mililitros a una *Fanta* de 350 mililitros, entonces también preferirá una *Pepsi* de 300 mililitros a una *Fanta* de 300 mililitros.

En la Gráfica 1.3, se representa este axioma en un espacio de elecciones de consumo *xy* $\in \Re^n_+$. Se puede apreciar en dicho esquema que, si la canasta *B* es preferida a *A*, entonces la canasta *B*' que es una canasta cercana a *B*, es preferida a *A*' que es una canasta cercana a *A*.

Gráfica 1.3



ii) Utilidad

La función de utilidad es la representación matemática de la relación de preferencias del consumidor, de tal forma que si la canasta *A* es preferida a la canasta *B*, se puede asegurar que la utilidad derivada de consumir la canasta *A* es mayor que la utilidad derivada de consumir la canasta *B*; es decir, si $A \succeq B \iff U(A) \geq U(B)$. Cabe mencionar que la función de utilidad existirá sólo si las preferencias son racionales.

a) Utilidad total y utilidad marginal

Para comprender mejor el concepto de utilidad, es importante establecer la diferencia entre dos conceptos: la utilidad total y la utilidad marginal. El primero, se refiere a la felicidad o satisfacción total obtenida al consumir una determinada cantidad de un bien en un periodo determinado, mientras que el segundo se refiere al cambio en la utilidad total después de consumir una unidad adicional de un bien. En términos matemáticos, la utilidad marginal (UMg) de un bien en particular es la primera derivada parcial de la función de utilidad con respecto a dicho bien.

Utilidad total:	$U = U(x)$
Utilidad marginal:	$UMg_x = \dfrac{\partial U(x)}{\partial x}$

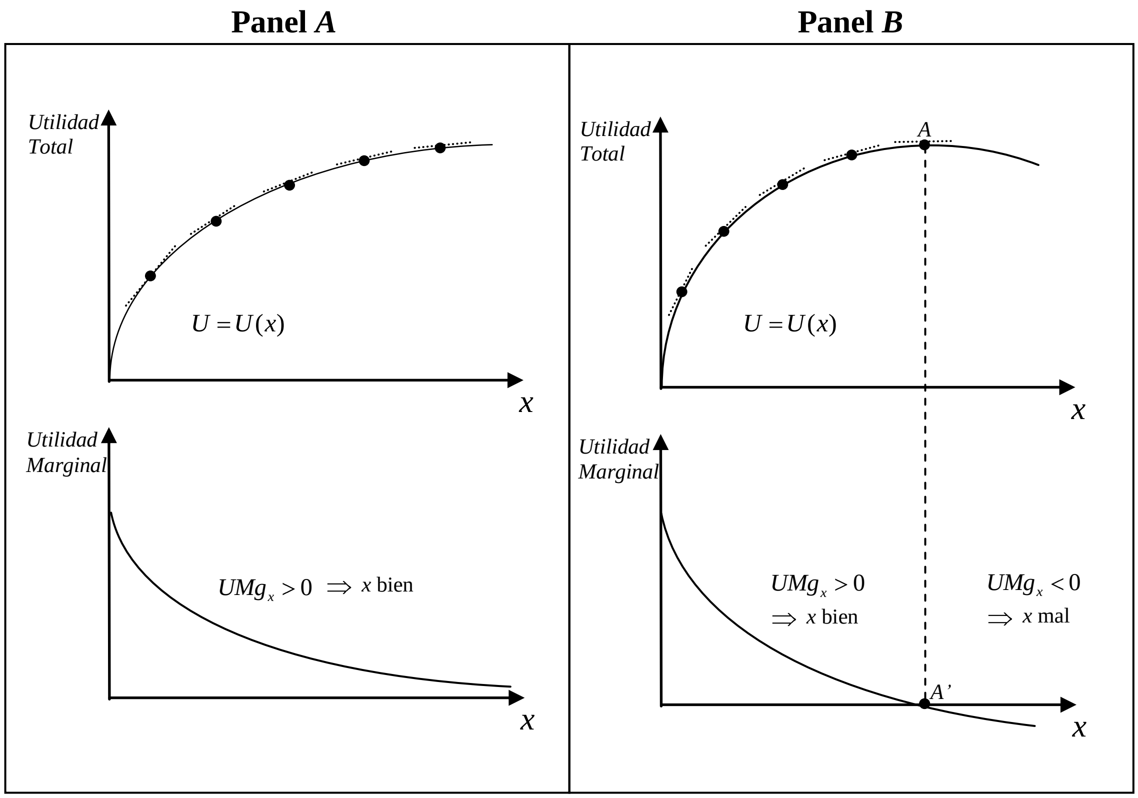
El concepto de utilidad marginal nos sirve para distinguir entre lo que los economistas consideramos un bien y un mal. Un bien es aquello de lo que más es preferido a menos; es decir, que si se consume más, la utilidad total aumenta. Por otra parte, un mal es aquello de lo que menos es preferido a más; es decir, que si se consume más, la utilidad total disminuye. Lo anterior implica que:

> Un bien es todo aquello cuya UMg es positiva
> y un mal es aquello cuya UMg es negativa.

La Gráfica 1.4, refleja dos posibles comportamientos de la utilidad total y de la utilidad marginal para preferencias por un solo bien; es decir $U = U(x)$. Por una parte, en el Panel *A*, se puede ver que la utilidad total crece a tasas decrecientes en todo su rango. Este comportamiento de la utilidad total implica que la utilidad marginal del bien *x* (UMg_x), que es la pendiente de la utilidad total, es decreciente mas nunca se vuelve cero; es decir, *x* siempre es un bien.

Por otra parte, es posible observar en el Panel *B* de dicho esquema que la función de utilidad total comienza a crecer a tasas decrecientes hasta llegar a un punto como *A*, donde encuentra un máximo y enseguida comienza a decrecer; este comportamiento de la utilidad total implica que la UMg_x es decreciente. Asimismo, se puede apreciar que en un principio la utilidad marginal es positiva, reflejando que *x* es un bien; sin embargo, ésta se vuelve cero en el punto máximo de la utilidad total (punto *A* y *A'*) tornándose eventualmente negativa, reflejando que a partir de dicho punto, *x* se torna en un mal.

Gráfica 1.4



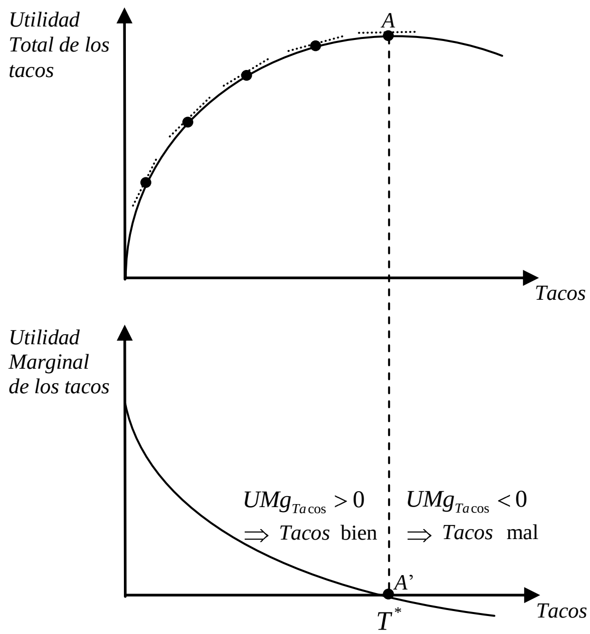
Ejemplo:

Mauricio es amante de los *tacos al pastor*; sin embargo no ha podido comer ni un solo taco al pastor durante mucho tiempo, ya que ha permanecido fuera de México durante varios años. Por ello, a su regreso al país lo único que desea hacer es visitar su puesto de tacos predilecto y comerse unos deliciosos *tacos al pastor*.

En la Gráfica 1.5, puede apreciarse lo que ocurre con la utilidad total y marginal de Mauricio derivada de comer tacos al pastor; puede apreciarse que en un punto como *A* la utilidad marginal de Mauricio por tacos es cero y a partir de ese punto deja de ser un bien para convertirse en un mal. Sin embargo, si suponemos que Mauricio es racional, no pasará del punto T^*. En realidad ningún individuo en su sano juicio consumiría más allá de T^*.

Ahora bien, muchos se preguntan por qué afuera de los clubes nocturnos los sábados en la noche hay muchos ejemplares de agentes económicos cuyo consumo de alcohol ha claramente sobrepasado el punto de saciedad. La cuestión aquí es que por supuesto no están en su sano juicio….

Gráfica 1.5



b) Insaciabilidad

El hecho de que un bien sea siempre un bien se debe a que la función de utilidad es creciente en sus dos argumentos x e y, lo que ocurre si y sólo si para cada valor de y corresponde un solo valor de x, es decir si la pendiente de la función no cambia de signo. En este caso se dice que el agente económico es insaciable.

En el Panel *B* de la Gráfica 1.4, se puede observar que, a partir del punto *A* el bien x se convierte en un mal y que por lo tanto, para un valor de y puede haber dos valores de x. Es decir, la pendiente de la utilidad total cambia de signo. En términos intuitivos, lo que sucede es que el individuo llega a un punto de saciedad o saturación (punto *A*) en el que consumir una unidad adicional le genera *des-utilidad*.[4]

[4] Utilidad negativa o infelicidad.

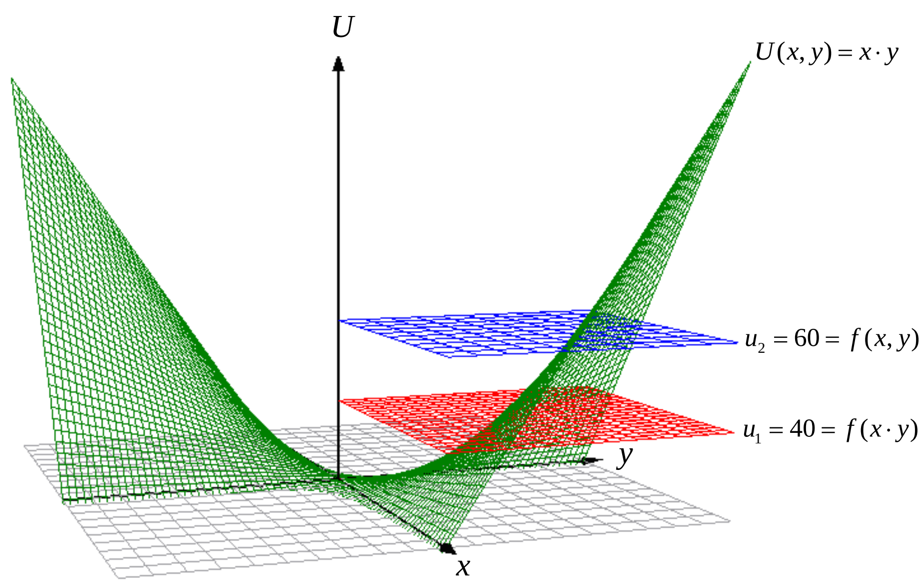
Intercambio voluntario y sustitución.

a) Curva de indiferencia

El conjunto de puntos en un plano donde una función $f(x,y)$ posee un valor constante $f(x,y)=c$ recibe el nombre de *curva de nivel* de f. El conjunto de todos los puntos $(x,y,f(x,y))$ en el espacio, para (x,y) en el dominio de f, se llama gráfica de f. La gráfica de f también se llama superficie $z=f(x,y)$.[5]

A continuación, se muestra en la Gráfica 1.6[6] la superficie tridimensional de una función de utilidad que representa preferencias estrictamente convexas[7] dada por $U(x,y)=x\cdot y$, donde x e y representan dos bienes distintos. Si los consumidores consumen cantidades positivas de ambos bienes, la región relevante se localiza exclusivamente donde x e y toman valores positivos.

Gráfica 1.6



Si realizamos un par de cortes horizontales sobre la gráfica tridimensional en dicha región en $U_1=40$ y $U_2=60$, es posible hallar las curvas de nivel respectivas al proyectar dichas secciones sobre el plano bidimensional (x,y), como se muestra a continuación en la Gráfica 1.7.

---

[5] Finney, Thomas, 1998, *Calculus*, 9th edition, Addison Wesley, p. 912

[6] Generado con *3D Grapher* v. 1.21 disponible en <http://www.romanlab.com>

[7] Más adelante se verán las características de las curvas de indiferencia, entre las cuales destaca la estricta convexidad al origen. En general, cuando una función de utilidad representa preferencias convexas se dice que la función de utilidad es cuasi cóncava. Para ver una definición matemática de la cuasi concavidad ver Jehle, Geoffrey y Reny, Phillip, *op.cit.* pp. 445-452.

Para estudiar las funciones de utilidad, los economistas, a menudo utilizamos las curvas de nivel, renombrándolas como *curvas de indiferencia* debido a que representan diferentes combinaciones de canastas de consumo que le reportan al individuo un mismo nivel de satisfacción o utilidad.

Una forma conveniente de dibujar una curva de indiferencia a partir de una función de utilidad $f(x,y)=c$ es resolver la ecuación para *y* en términos de *x* y graficarla.

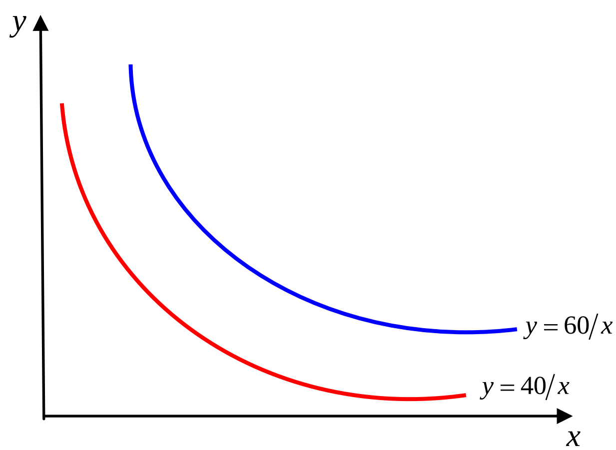
$$y=g(x).$$

A continuación, se muestran las curvas de indiferencia resultantes para $U(x,y)=x\cdot y$ considerando niveles de utilidad de $U_1=40$ y $U_2=60$.

Si $U(x,y)=40 \;\Rightarrow\;$ Curva de indiferencia: $y=40/x$

Si $U(x,y)=60 \;\Rightarrow\;$ Curva de indiferencia: $y=60/x$

Gráfica 1.7



b) Tasa Marginal de Sustitución

i) Definición en términos de la pendiente de la curva de indiferencia

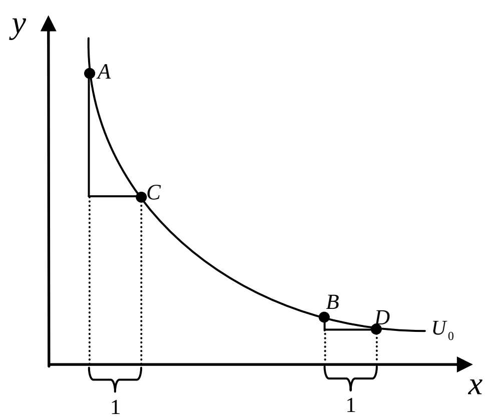
Si el consumidor cuenta con dos bienes de consumo *x* e *y*, nos interesa saber ¿cuántas unidades de *y* estaría dispuesto a sacrificar, a cambio de obtener una unidad adicional de *x*, tal que su nivel de utilidad se mantenga constante? La respuesta a esta pregunta dependerá de las cantidades relativas con las que inicialmente cuente de ambos bienes. Asimismo, una de las características de las curvas de indiferencia es que su pendiente es negativa, por lo que para mantener la utilidad constante el consumidor deberá estar dispuesto a renunciar al consumo de cierta cantidad de un bien para poder consumir más de otro bien.

En la Gráfica 1.8, se puede observar que en un punto como *A*, la canasta de consumo tiene relativamente más unidades del bien *y* que del bien *x*; ahora bien, es posible apreciar en dicho esquema que, para poder consumir una unidad adicional del bien *x*, el individuo está dispuesto a sacrificar[8] más de una unidad del bien *y*. Por otra parte, en el punto *B*, donde la canasta de consumo tiene relativamente más de *x* que de *y* ocurre lo contrario; es decir, que si el consumidor deseara pasar del punto *B* al punto *D*, para consumir una unidad adicional del bien *x*, debería renunciar a menos de una unidad del bien *y*. Esta cantidad del bien *y* que el consumidor está dispuesto a intercambiar a cambio de una unidad adicional del bien *x* se conoce como la *Tasa Marginal de Sustitución* (en lo sucesivo "*TMS"*). Puede verse en la Gráfica 1.8 que la *TMS* es mayor en *A* que en *B*.

Ahora bien, ¿por qué la *TMS* es decreciente a lo largo de la curva de indiferencia? Se puede apreciar en la Gráfica 1.8 que en un punto como *A* el consumidor tiene una mayor dotación del bien *y* que del bien *x*, por lo que estará dispuesto a entregar más unidades de *y* a cambio de obtener una unidad adicional de *x*; sin embargo, a medida que nos movemos del punto *A* al *B* esta situación se revierte poco a poco, dado que su dotación relativa del bien *y* con respecto al bien *x* está decreciendo; es por ello que las curvas de indiferencia son estrictamente convexas; de ahí que sea razonable suponer que la *TMS* es decreciente a lo largo de la curva de indiferencia.

$$\boxed{TMS \text{ decreciente} \Rightarrow \text{estricta convexidad}}$$

Gráfica 1.8



8 En lo sucesivo se utilizan indistintamente los términos sacrificar, intercambiar o dejar de consumir.

Definición formal de la *TMS*

La *TMS* es el negativo de la pendiente de la curva de indiferencia:

$$TMS = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\bar{u}}$$

Si *x* e *y* son bienes, la pendiente de la curva de indiferencia será negativa y la *TMS* positiva.

A su vez, al ser la pendiente de la curva de indiferencia creciente (i.e. crece de $-\infty$ a cero), la *TMS* es decreciente (i.e. decrece de ∞ a cero)

Ejemplo:

A continuación, introducimos una función de utilidad que depende de dos bienes, *x* e *y*.

Considérese un consumidor cuya función de utilidad está dada por $U(x, y) = \sqrt{xy+1}$. Nos interesa hallar un conjunto de combinaciones de *x* e *y* que le reporten un mismo nivel de utilidad (digamos 7).

La curva de indiferencia asociada a $U_1 = 7$ es $7 = (xy+1)^{1/2}$. Resolviendo para *y*, tenemos que $y = 48/x$ que es la ecuación de la curva de indiferencia.

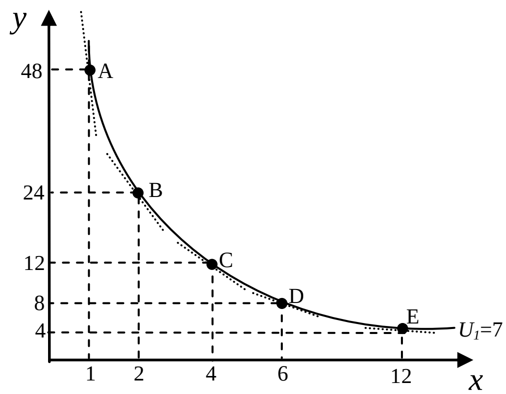
Por otra parte, la pendiente de la curva de indiferencia es negativa y está dada por $dy/dx = -48/x^2 < 0$. Por otra parte, se puede apreciar en la cuarta columna de la Tabla 1.1 que la TMS es decreciente y está dada por $TMS = 48/x^2 > 0$; asimismo, puede verse en la quinta columna que el consumidor sería indiferente entre las canastas *A*(1,48), *B*(2,24), *C*(4,12), *D*(6,8) y *E*(12,4), ya que le reportan un mismo nivel de utilidad.

Tabla 1.1

Canasta	x	$y = 48/x$	$TMS = 48/x^2$	$U(x, y) = \sqrt{xy+1}$
A	1	48	48	7
B	2	24	12	7
C	4	12	3	7
D	6	8	4/3	7
E	12	4	1/3	7

Gráficamente se tiene lo siguiente:

Gráfica 1.9



ii) Definición de *TMS* utilizando utilidades marginales

Una alternativa para medir la *TMS* es mediante el cálculo de las utilidades marginales. Anteriormente, definimos a la utilidad marginal como el cambio en la utilidad total después de consumir una unidad adicional de un bien. Si la utilidad depende de dos bienes $U = U(x, y)$, la diferencial total[9] está dada por:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \,.$$

Sin embargo, a medida que nos movemos a lo largo de la curva de indiferencia, el nivel de utilidad permanece constante, es decir $dU = 0$. Por lo tanto:

$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0$; donde $\frac{\partial U}{\partial x}$ y $\frac{\partial U}{\partial y}$ son las utilidades marginales de x e y, respectivamente.

Reescribiendo $UMg_x dx + UMg_y dy = 0 \quad \Rightarrow \quad UMg_x dx = -UMg_y dy \quad \Rightarrow \quad \underbrace{-\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\bar{u}}}_{TMS} = \frac{UMg_x}{UMg_y}$

$$\boxed{TMS = \frac{UMg_x}{UMg_y} > 0}$$

[9] Nicholson, Walter, 2005, *Microeconomic Theory. Basic Principles and Extensions*, 9th edition. Thomson South-Western, p. 80.

Que es la *TMS* entre *x* e *y*; es decir, la tasa a la cual el individuo está dispuesto a intercambiar unidades de *x* por unidades de *y*.

Ejemplo:

Si la función de utilidad está dada por $U(x,y)=\sqrt{xy+1}$, la *TMS* está dada por:

$$\left.\begin{aligned} UMg_x &= \frac{1}{2}(xy+1)^{-1/2}\,y \\ UMg_y &= \frac{1}{2}(xy+1)^{-1/2}\,x \end{aligned}\right\} \quad TMS=\frac{UMg_x}{UMg_y}=\frac{1/2\,(xy+1)^{-1/2}\,y}{1/2\,(xy+1)^{-1/2}\,x}=\frac{y}{x}$$

Dada esta *TMS* se puede apreciar que, cuando aumenta *x*, la *TMS* disminuye, lo cual implica que las curvas de indiferencia generadas por esta función de utilidad son estrictamente convexas. Para ver la convexidad de las curvas de indiferencia, es necesario derivar la *TMS* con respecto a *x*.

$$\frac{dTMS}{dx}=\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}$$

Pero $\frac{dy}{dx}=-TMS$

Por lo tanto $\frac{dTMS}{dx}=\frac{-(xTMS+y)}{x^2}<0$

Es decir la *TMS* es decreciente.

Al tratar de explicar la estricta convexidad de las curvas de indiferencia (*TMS* decreciente), comúnmente se comete el error de pensar que esto se debe a que la utilidad marginal de los bienes es decreciente; sin embargo, esto no es correcto.

Cuando hablamos de *TMS* nos referimos a movimientos a lo largo de una curva de indiferencia y esto implica que están cambiando tanto el bien *x* como el bien *y*, por lo que hay que tomar en consideración:

1) Cómo cambia la UMg_x cuando cambia el consumo de *x*.

2) Cómo cambia la UMg_y cuando cambia el consumo de *y*.

Pero, también hay que tomar en cuenta los efectos cruzados, es decir:

3) Cómo cambia la UMg_x cuando cambia el consumo de *y*.

4) Cómo cambia la UMg_y cuando cambia el consumo de *x*.

En realidad el hecho de que la utilidad marginal sea decreciente no es condición necesaria ni suficiente para la estricta convexidad, lo que es relevante son los efectos cruzados sobre las utilidades marginales. Por ejemplo; para un individuo que consume *tacos* y *cerveza*, no basta con observar cómo cambia la utilidad marginal de los *tacos* al consumir más *tacos*, sino también cómo cambia la utilidad marginal de los *tacos* al consumir *cerveza*. A continuación, mostraremos este punto con mayor claridad mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

1) Consideremos la siguiente función de utilidad.

$$U(x,y) = -\frac{1}{(xy+1)}$$

Calculando las utilidades marginales de *x* e *y* tenemos:

$$UMg_x = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{(xy+1)^2}$$

$$\frac{\partial UMg_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{2y^2}{(xy+1)^3} < 0 \qquad \Rightarrow UMg_x \text{ decreciente}$$

$$UMg_y = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{(xy+1)^2}$$

$$\frac{\partial UMg_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{2x^2}{(xy+1)^3} < 0 \qquad \Rightarrow UMg_y \text{ decreciente}$$

Entonces podemos calcular la *TMS* como:

$$TMS = \frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}} = \frac{\dfrac{y}{(xy+1)^2}}{\dfrac{x}{(xy+1)^2}} = \frac{y}{x}$$

Ahora, nos interesa saber si la *TMS* es creciente, decreciente o constante. Para ello, derivamos totalmente la *TMS* con respecto a *x*.

$$\frac{dTMS}{dx} = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}$$

Pero $\frac{dy}{dx} = -TMS$

Por lo tanto $\frac{dTMS}{dx} = \frac{-(xTMS + y)}{x^2} < 0$

Es decir la *TMS* es decreciente.

$\therefore$ con utilidades marginales decrecientes tenemos *TMS* decreciente.

2) Consideremos la siguiente función de utilidad.

$$U(x, y) = xy - 1$$

$$UMg_x = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial UMg_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad UMg_x \text{ constante}$$

$$UMg_y = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial UMg_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad UMg_y \text{ constante}$$

$$TMS = \frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}} = \frac{y}{x}$$

Ahora, para analizar si la *TMS* es creciente, decreciente o constante, derivamos totalmente la *TMS* con respecto a *x*:

$$\frac{dTMS}{dx} = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} \quad .$$

Pero $\frac{dy}{dx} = -TMS$

Por lo tanto $\frac{dTMS}{dx} = \frac{-(xTMS + y)}{x^2} < 0$

Es decir, la *TMS* es decreciente.

$\therefore$ con utilidades marginales constantes tenemos *TMS* decreciente.

3) Consideremos la siguiente función de utilidad[10].

$$U(x, y) = x^2 y^2$$

$$UMg_x = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = 2xy^2 > 0$$

$$\frac{\partial UMg_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} = 2y^2 > 0 \qquad \Rightarrow UMg_x \text{ creciente}$$

$$UMg_y = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = 2x^2 y$$

$$\frac{\partial UMg_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = 2x^2 > 0 \qquad \Rightarrow UMg_y \text{ creciente}$$

$$TMS = \frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}} = \frac{2xy^2}{2x^2 y} = \frac{y}{x}$$

Nuevamente, derivamos totalmente la *TMS* con respecto a *x* para determinar si la *TMS* es creciente, decreciente o constante:

$$\frac{dTMS}{dx} = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}.$$

Pero $\frac{dy}{dx} = -TMS$

Por lo tanto $\frac{dTMS}{dx} = \frac{-(xTMS + y)}{x^2} < 0$

[10] Este ejercicio corresponde al inciso b. del Problema 3.1 de Nicholson (2005), p. 89.

Es decir, la *TMS* es decreciente.

$\therefore$ con utilidades marginales crecientes tenemos *TMS* decreciente.

Del ejemplo anterior se desprende que, independientemente de que las utilidades marginales sean crecientes, decrecientes o constantes, la *TMS* puede ser decreciente, es decir, las curvas de indiferencia asociadas son estrictamente convexas. Asimismo, puede apreciarse que las preferencias son iguales entre sí, ya que las *TMS* son las mismas.

c) Transformaciones Monotónicas

Una transformación monotónica es una forma de transformar un conjunto de números en otro de tal forma que su orden se preserve. En realidad, no existe una única manera de presentar una relación de preferencias $\succeq$, por lo que al aplicar una transformación monotónica positiva a cualquier función de utilidad sobre $\Re_+^n$ que represente una relación de preferencias $\succeq$, se creará otra función de utilidad que preservará la misma relación de preferencias $\succeq$.

Sea $U(x,y)$ una función de utilidad sobre $\Re_+^n$.

Sea $W(x,y)$ una transformación para $U(x,y)$; es decir, $W(x,y) = g(U(x,y))$.

Se dice que $W(x,y)$ es una transformación monotónica de $U(x,y)$ si:

a) La Tasa Marginal de sustición es la misma para $U(x,y)$ y $W(x,y)$
   y
b) La primera derivada de W con respecto a U es positiva.

Ejemplo:

Sea $U(x,y) = \sqrt{xy}$

y Sea $W(x,y) = \ln(U(x,y))$

¿Es $W(x,y)$ una transformación monotónica de $U(x,y)$?

La TMS de sustitución de $U(x,y)$ está dada por:

$$\left.\begin{aligned} UMg_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2}(xy)^{-1/2}y \\ UMg_y &= \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2}(xy)^{-1/2}x \end{aligned}\right\} \qquad \frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{1/2\,(xy)^{-1/2}y}{1/2\,(xy)^{-1/2}x} = \frac{y}{x}$$

Ahora veamos qué pasa con la *TMS* de $W(x,y)$.

Si $W(x,y) = \ln(U(x,y)) = \ln \; x^{1/2} y^{1/2} \; = \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y)$

la *TMS* de $W(x,y)$ está dada por

$$\left.\begin{array}{l} UMg_x = \dfrac{\partial W}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2x} \\[2em] UMg_y = \dfrac{\partial W}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2y} \end{array}\right\} \quad \frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{\frac{\partial W}{\partial x}}{\frac{\partial W}{\partial y}} = \frac{\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2y}} = \frac{y}{x}$$

Como se puede observar en los resultados anteriores, La tasa marginal de sustitución es la misma para $U(x,y)$ y para $W(x,y)$.

Sin embargo, todavía no podemos asegurar que $W(x,y)$ sea una transformación monotónica de $U(x,y)$. Pues necesitamos ver cuál es el signo de la primera derivada de $W(x,y)$ con respecto a $U(x,y)$.

Recordemos que $W(x,y) = \ln(U(x,y))$, por lo que $\dfrac{\partial W}{\partial U} = \dfrac{1}{U} > 0$

Es decir la primera derivada es positiva y por lo tanto podemos asegurar que $W(x,y)$ es una transformación monotónica de $U(x,y)$.

Algunas transformaciones monotónicas positivas incluyen:

- Añadir una constante a $U(x,y) \Rightarrow W(x,y) = U(x,y) + k$;
- Multiplicar a $U(x,y)$ por una constante positiva $\Rightarrow W(x,y) = U(x,y) \cdot k$; y
- Elevar $U(x,y)$ a una potencia impar[11] $\Rightarrow W(x,y) = U(x,y)^{2k+1}$.

Donde *k* es un número entero positivo.

[11] Para ver lo que ocurre con las potencias pares, considérese el caso $f(u) = u^2$, efectivamente es una transformación monotónica para una *u* positiva; pero no para una *u* negativa; de ahí la importancia de definir el dominio de una transformación monotónica, que es el conjunto de variables sobre las cuales dicha transformación será aplicada.

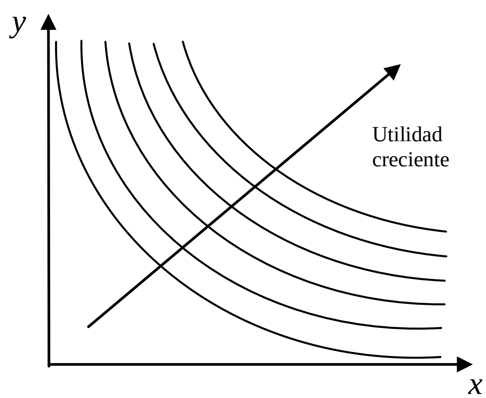
d) Características de las curvas de indiferencia

Las curvas de indiferencia poseen cinco propiedades esenciales; las dos primeras las debe cumplir todo mapa de curvas de indiferencia, mientras que las otras tres características pueden no cumplirse en algunos casos especiales.

i) Mapa denso

El mapa de curvas de indiferencia es denso. Es decir, todas y cada una de las canastas del plano (x, y) pertenecen a una curva de indiferencia. En la Gráfica 1.10, se muestra que el mapa es denso y que el nivel de utilidad representado por estas curvas se incrementa a medida que nos movemos hacia arriba y a la derecha.

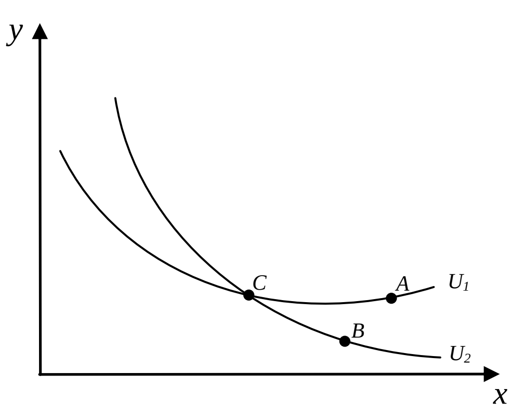
Gráfica 1.10



ii) No se cruzan (transitividad)

Las curvas de indiferencia no pueden cortarse, ya que estaríamos violando el axioma de transitividad. A manera de contraejemplo, en la Gráfica 1.11 se dibujan dos curvas de indiferencia U_1 y U_2 que se cruzan entre sí. Por un lado, se puede apreciar que un consumidor está indiferente entre los puntos *A* y *C* que se encuentran sobre U_1, mientras que también está indiferente entre puntos *B* y *C* sobre U_2. Lo anterior implica (por transitividad) que el individuo debería estar indiferente entre *A* y *B*; sin embargo, esto no sucedería en este caso, ya que la canasta *A* contiene una mayor cantidad de ambos bienes *x* e *y*, y se encuentra en una curva de indiferencia más alta.

Gráfica 1.11



Si $A \sim C$ y $C \sim B \Rightarrow A \sim B$
Lo cual es una contradicción, porque *A* está en una curva de indiferencia más alta que *B*.

iii) Fuerte o Estrictamente Monotónicas

La propiedad de monotonicidad estricta, nos dice que el consumidor siempre preferirá un plan de consumo que signifique *más* a uno que signifique *menos.* Es decir, si al añadir una mayor cantidad de uno de los bienes o más a su canasta de consumo, el consumidor alcanza un mayor nivel de utilidad, se dice que sus preferencias son *fuerte o estrictamente monótonas*.

Por otro lado, se dice que las preferencias de un agente económico son *débilmente monótonas* si al añadir una mayor cantidad de uno de los bienes a su canasta de consumo, su utilidad se mantiene constante.[12]

Gráficamente, la estricta monotonicidad elimina las posibilidades de que cambie el signo de la pendiente de las curvas de indiferencia y de que la pendiente de la curva de indiferencia sea cero o infinita.

iv) Pendiente negativa

La pendiente negativa de las curvas de indiferencia es consecuencia de la fuerte monotonicidad. Para el caso de dos bienes, la pendiente de las curvas de indiferencia será negativa, mostrando que para mantener la utilidad constante el individuo deberá estar dispuesto a renunciar al consumo de cierta cantidad de un bien para poder consumir más del otro.

v) Estrictamente convexas al origen

Las preferencias son convexas si los conjuntos de canastas preferidas son convexos. Ahora bien, un conjunto de puntos es estrictamente convexo si al tomar dos puntos cualesquiera del conjunto y unirlos mediante una línea recta, ésta se encuentre completamente contenida dentro del conjunto.

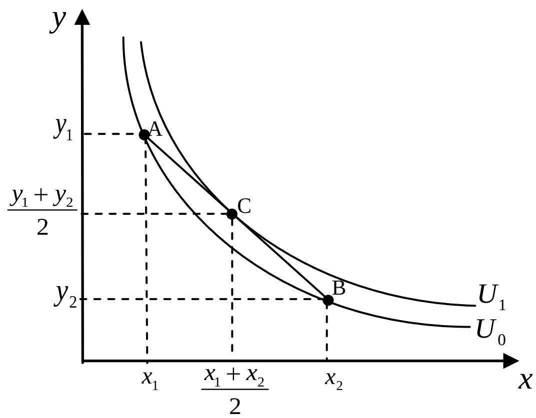
En particular, una *TMS* decreciente garantiza la estricta convexidad al origen de las curvas de indiferencia, por lo que el consumidor siempre preferirá un consumo balanceado. Por ejemplo, en la Gráfica 1.12[13] se puede apreciar que si tomamos dos canastas extremas de una curva de indiferencia estrictamente convexa (U_0) entre las cuales el consumidor sea

[12] Un ejemplo de preferencias monótonas –mas no estrictamente– lo constituye la función de utilidad de Leontief (i.e. de perfectos complementos) la cual se verá a continuación.
[13] Ver Nicholson (2005) p. 78.

indiferente, tales como $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$; una canasta promedio (balanceada) tal como $C\ \ (x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2$ le permitiría alcanzar una curva de indiferencia más alta (U_1).

Finalmente, cabe recalcar que la estricta convexidad puede darse independientemente de que la utilidad marginal sea constante, creciente o decreciente.

Gráfica 1.12



En general, cuando hablemos de curvas de indiferencia regulares o típicas, nos referiremos a aquellas que son estrictamente convexas, fuertemente monotónicas y continuas.

e) Algunos casos especiales de curvas de indiferencia

i) Un mal y un bien

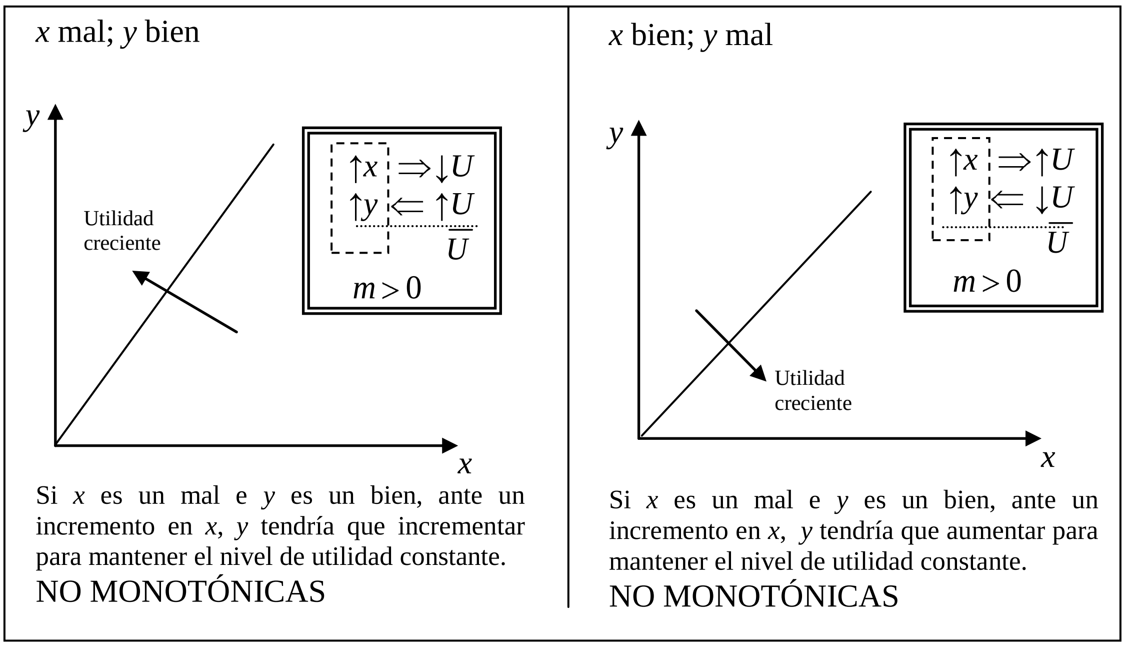
Un mal es un objeto cuyo consumo genera *desutilidad*; es decir, cuya utilidad marginal es negativa; en este sentido si *x* es un mal, entonces $UMg_x = \partial U(x, y)/\partial x < 0$. No obstante lo anterior, la definición de mal es subjetiva, toda vez que depende de las preferencias individuales.

Al graficar un bien conjuntamente con un mal, se puede apreciar en los paneles *A* y *B* de la Gráfica 1.13, que las curvas de indiferencia tendrán pendiente positiva; esto sucederá siempre que se grafiquen dos bienes de distinta naturaleza, debido a que el individuo preferirá tener más del bien y menos del mal; por lo que, ante un incremento en el mal, para mantener su nivel de utilidad constante deberá incrementarse también el bien.

Es importante mencionar que la naturaleza del bien (i.e. que se trate de un bien o un mal) no determina la curvatura de la curva de indiferencia, sino solamente el signo de su pendiente.

Gráfica 1.13

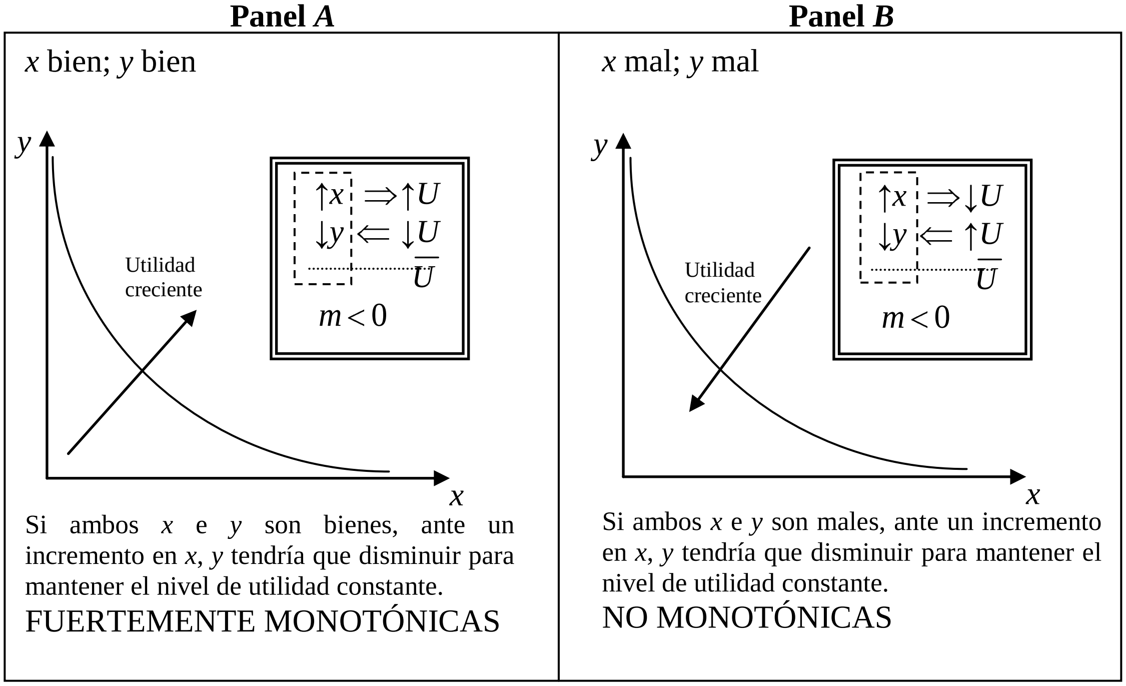
Panel *A* **Panel *B***



Por otra parte, en los paneles *A* y *B* de la Gráfica 1.14, es posible observar que al tratarse de bienes de la misma naturaleza, la pendiente de la curva de indiferencia sería negativa. Lo anterior, se demuestra con un ejemplo numérico, a continuación.

Gráfica 1.14

Panel *A* **Panel *B***



Ejemplo:

1. Para dos bienes:

Sea $U(x,y) = x^{1/2}y^{1/2}$

$$UMgx = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2} > 0 \quad \Rightarrow x \text{ es un bien}$$

$$UMgy = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2} > 0 \quad \Rightarrow y \text{ es un bien}$$

$$TMS = \frac{\cancel{1/2}\,x^{-1/2}y^{1/2}}{\cancel{1/2}\,x^{1/2}y^{-1/2}} = \frac{y}{x} > 0$$

$$\frac{dTMS}{dx} = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}$$

Pero $\frac{dy}{dx} = -TMS$

Por lo tanto $\frac{dTMS}{dx} = \frac{-(xTMS + y)}{x^2} < 0$

Es decir, la *TMS* es decreciente.

2. Para dos males:

Sea $U(x,y) = x^{-1/2}y^{-1/2}$

$$UMgx = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{2}x^{-3/2}y^{-1/2} < 0 \quad \Rightarrow x \text{ es un mal}$$

$$UMgy = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{-3/2} < 0 \quad \Rightarrow y \text{ es un mal}$$

$$TMS = \frac{-\cancel{1/2}\,x^{-3/2}y^{-1/2}}{-\cancel{1/2}\,x^{-1/2}y^{-3/2}} = \frac{y}{x} > 0$$

$$\frac{dTMS}{dx} = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}$$

Pero $\frac{dy}{dx} = -TMS$

Por lo tanto $\frac{dTMS}{dx} = \frac{-(xTMS + y)}{x^2} < 0$

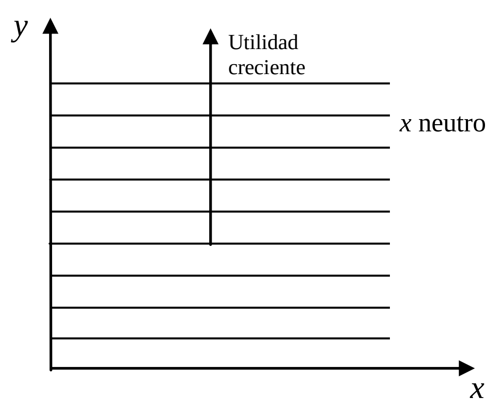
Es decir, la *TMS* es decreciente.

ii) Bienes Neutros a la utilidad

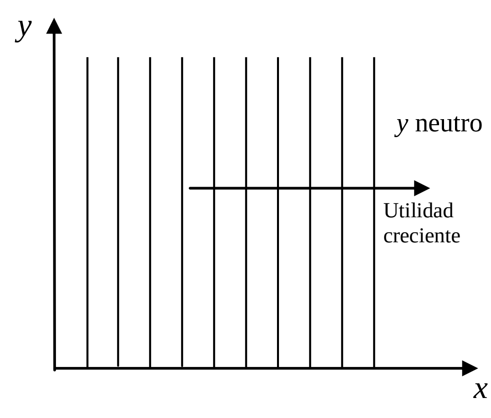
Un bien neutro a la utilidad es aquel cuyo consumo no modifica en sentido alguno la utilidad del consumidor; es decir, le genera al individuo la misma utilidad consumir cero unidades del bien que cualquier cantidad positiva; esto es equivalente a decir que su utilidad marginal es nula. Gráficamente, las curvas de indiferencia para bienes neutrales se pueden representar mediante líneas horizontales o verticales, dependiendo del eje en el que se grafique el bien neutral.

Por ejemplo, si el bien *x* es un bien neutro a la utilidad (i.e. $UMg_x = \partial U(x, y)/\partial x = 0$), se tendrán curvas de indiferencia horizontales como las que se muestran en la Gráfica 1.15 y los incrementos en la utilidad tan sólo dependerán de los aumentos en el consumo del bien normal a la utilidad, *y*. La intuición es que el individuo está dispuesto a sacrificar cero unidades de *y* por unidades adicionales de *x* (*TMS=0*). Por otra parte, si el bien *y* fuera neutro a la utilidad, entonces las curvas de indiferencia estarían representadas por líneas verticales tales como las de la Gráfica 1.16 y los incrementos en la utilidad tan sólo dependerán de los aumentos en *x*. El individuo está dispuesto a sacrificar una cantidad infinita de *y* por unidades adicionales de *x*.

Gráfica 1.15



Gráfica 1.16



Estas curvas de indiferencia reflejan preferencias Mónotonicas o Débilmente Monotónicas

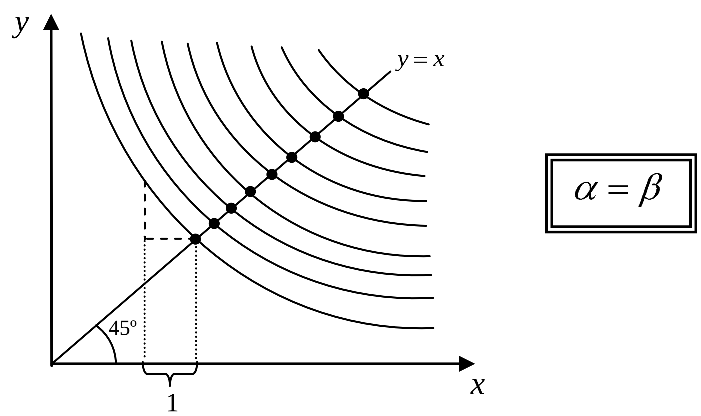
Función de utilidad Cobb-Douglas

Una función de utilidad usada con frecuencia es la función *Cobb-Douglas*,[14] la cual puede representarse de la forma $U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$; donde α y β son constantes positivas que reflejan la preferencia relativa que el individuo tiene por los bienes.

Las preferencias representadas por una función de utilidad Cobb-Douglas con parámetros α y β positivos, son estrictamente convexas, fuertemente monótonas y además la función de utilidad es continua y diferenciable.

A continuación, se ilustran tres ejemplos de preferencias Cobb-Douglas de la forma $U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$ para los cuales el parámetro α es igual, mayor y menor que el parámetro β, respectivamente en cada caso. En primer lugar, en la Gráfica 1.17 se muestra el caso en el que los parámetros α y β son iguales; es decir que la preferencia relativa por el consumo de uno u otro bien es la misma.

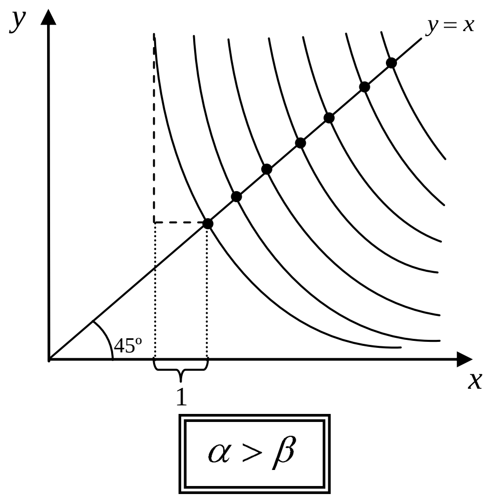
Gráfica 1.17



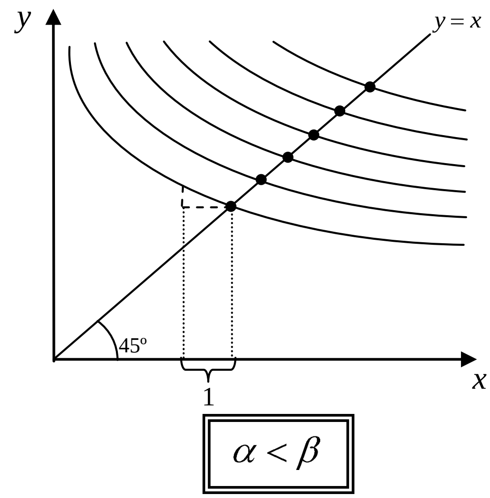
En las Gráfica 1.18 y 1.19, se muestran los casos en que $\alpha > \beta$ y $\alpha < \beta$, respectivamente. Por ejemplo, puede apreciarse en la Gráfica 1.18 que existe una preferencia mucho más marcada por el bien *x*; es decir, que para que el individuo sacrifique una unidad de consumo del bien *x*, se le tendría que compensar con mucho más que una unidad del bien *y* para mantener su nivel de utilidad constante. Caso contrario ocurre en la Gráfica 1.19 donde puede verse que existe una preferencia más marcada por el bien *y*. Cabe mencionar que, independientemente de las magnitudes de α y β, las curvas de indiferencia tendrán pendiente negativa y serán estrictamente convexas.

[14] Recibe el nombre de Cobb-Douglas en honor a Paul Howard Douglas (1892-1976) y Charles W. Cobb (?). Douglas, fue un economista del siglo XX de la Universidad de Chicago, quien posteriormente se convirtió en Senador estadounidense; mientras que Charles W. Cobb se desempeñó como matemático en el Amherst College. La forma funcional Cobb-Douglas fue originalmente utilizada para estudiar el comportamiento de la producción en la economía estadounidense.

Gráfica 1.18



Gráfica 1.19



En los tres gráficos anteriores, puede verse que los puntos de intersección que posee la recta de 45 grados con las curvas de utilidad corresponden a canastas donde el individuo consume la misma cantidad de ambos bienes, donde la disposición a intercambiar unidades de *y* a cambio de una unidad adicional de *x* varía de acuerdo con la preferencia relativa que el consumidor tenga por el consumo de *x* e *y*.

i) Características de una función de utilidad Cobb-Douglas

(1) Relación entre los parámetros α y β con las utilidades marginales

En la función de utilidad Cobb-Douglas, el valor de los parámetros α y β se encuentra relacionado con las utilidades marginales de cada bien.

Por ejemplo, si $U(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta} \quad \Rightarrow \quad UMg_x = \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}$.

Entonces como $\dfrac{\partial UMg_x}{\partial x} = \alpha \cdot (\alpha-1) x^{\alpha-2} y^{\beta}$, el valor de α determinará si la UMg_x es decreciente, constante o creciente:

$$\frac{\partial UMg_x}{\partial x} = \alpha \cdot (\alpha-1) x^{\alpha-2} y^{\beta} \begin{cases} \text{Si } \alpha < 1 \;\Rightarrow\; (\alpha-1) < 0 \quad \Rightarrow \quad UMg_x \text{ decreciente} \\ \text{Si } \alpha = 1 \;\Rightarrow\; (\alpha-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad UMg_x \text{ constante} \\ \text{Si } \alpha > 1 \;\Rightarrow\; (\alpha-1) > 0 \quad \Rightarrow \quad UMg_x \text{ creciente} \end{cases}$$

Lo mismo aplica para UMg_y y el valor de β. A continuación, en la Tabla 1.4 se resume de forma conveniente dicha relación:

Tabla 1.4

	$\alpha < 1$	$\alpha = 1$	$\alpha > 1$
UMg_x	Decreciente	Constante	Creciente
	$\beta < 1$	$\beta = 1$	$\beta > 1$
UMg_y	Decreciente	Constante	Creciente

(2) Homogeneidad

Estamos interesados en conocer la forma en que una función se comporta al momento en que todas sus variables cambian en una misma proporción. Lo anterior, nos lleva al concepto de la homogeneidad de las funciones.

> Se dice que una función $f(x_1, x_2,..., x_n)$ es homogénea de grado *k*, si satisface: $f(\gamma x_1, \gamma x_2, ..., \gamma x_n) = \gamma^k f(x_1, x_2, ..., x_n) \ \ \forall \ \gamma > 0$.

Es sencillo demostrar que la función de utilidad Cobb-Douglas es homogénea de grado $\alpha + \beta$:

Sea $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$ una función de utilidad Cobb-Douglas.

Entonces si γ es un parámetro positivo, tenemos que:

$$U(\gamma x, \gamma y) = (\gamma x)^\alpha (\gamma y)^\beta$$

$$= \gamma^\alpha x^\alpha \gamma^\beta y^\beta$$

$$= \gamma^{(\alpha+\beta)} x^\alpha y^\beta$$

$$= \gamma^{(\alpha+\beta)} U(x, y).$$

Para el caso en que $\alpha + \beta = 1$ se dice que la función es homogénea de grado 1, lo cual significa que si se duplicaran todos sus argumentos, la utilidad se también se duplicaría. Por otra parte, para funciones homogéneas de grado 0 (cero), al duplicar todos sus argumentos la utilidad permanecerá inalterada.

(3) Preferencias homotéticas

Las funciones homotéticas son las que se obtienen como transformaciones monotónicas crecientes de funciones homogéneas. Se dice que las preferencias de un individuo son homotéticas si la *TMS* depende solamente de la razón de las cantidades de ambos bienes y no del nivel de cada uno por separado. La importancia de las funciones homotéticas radica en que las curvas de indiferencia serán idénticas entre sí, por lo que al estudiar el comportamiento de un individuo que posea preferencias homotéticas se pueden generalizar resultados al conocer cuando menos una curva de indiferencia.

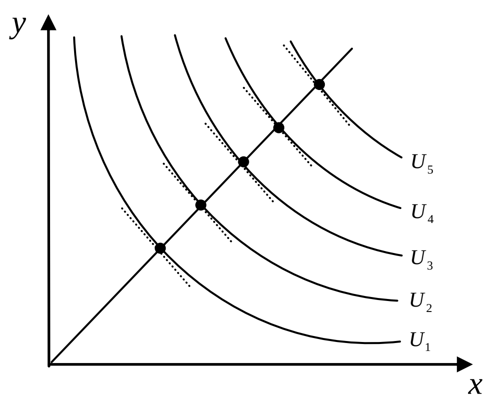
Las funciones de utilidad tipo Cobb-Douglas, son funciones de utilidad homotéticas,[15] ya que su *TMS* depende de la razón *y/x*:

Por ejemplo, para $U(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$

$$TMS=\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y}=\frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{y}{x}\ \Rightarrow \text{ Depende de la razón } y/x \Rightarrow \text{ es Homotética.}$$

En la Gráfica 1.20, puede apreciarse que al trazar un rayo que parte del origen, éste corta a las curvas de indiferencia en puntos donde la pendiente es la misma.

Gráfica 1.20



f) Función de utilidad cuasi-lineal

Una función de utilidad cuasi-lineal posee las formas:

a) $U(x,y)=f(x)+y$, donde *y* es una constante distinta para cada nivel de curva de indiferencia y la función $f(x)$ es la que permite la convexidad de las curvas de indiferencia[16]. Asimismo, suele ser que $f'(x)>0$ y $f''(x)<0$, lo que garantiza que la *TMS* sea decreciente.

[15] También las funciones de utilidad de *sustitutos perfectos*, *complementos perfectos* y tipo *CES* son homotéticas.

[16] Varian, Hal R., 1999, *Intermediate Microeconomics . A Modern Approach*., 5th edition. W. W. Norton & Company, p. 63

O

b) $u(x,y) = x + f(y)$, donde x es una constante distinta para cada nivel de curva de indiferencia y la función $f(y)$ es la que permite la convexidad de las curvas de indiferencia[17]. Asimismo, suele ser que $f'(y) > 0$ y $f''(y) < 0$, lo que garantiza que la *TMS* sea decreciente.

En este caso la función de utilidad es lineal en *y*; no obstante (posiblemente) no lineal en *x*; de ahí que reciba el nombre de *función de utilidad cuasi-lineal*. Por su parte, las funciones de utilidad cuasi-lineales no son homotéticas.

Ejemplos específicos de funciones de utilidad cuasi-lineales pueden ser: $U(x,y) = \sqrt{x} + y$, ó $U(x,y) = x + \ln(y)$.

Por ejemplo, para $U(x,y) = \ln(x) + y$, el bien *x* posee utilidad marginal decreciente, mientras que la del bien *y* es constante, lo que significa que la disposición a renunciar a *x* para obtener una unidad adicional de *y* dependerá sólo de su dotación de *x*:

$$UMg_x = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial UMg_x}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad UMg_x \text{ Decreciente}$$

$$UMg_y = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial UMg_y}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad UMg_y \text{ Constante}$$

$$TMS = \frac{\partial U}{\partial x} \Big/ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1/x}{1} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \text{No-homotética (}TMS\text{ no depende de la razón } y/x\text{)}$$

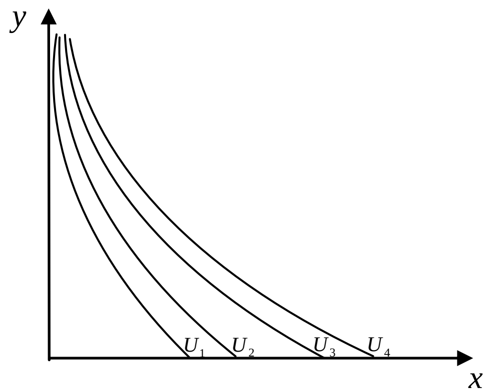
$$\frac{dTMS}{dx} = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad TMS \text{ decreciente}$$

[17] Varian, Hal R., 1999, *Intermediate Microeconomics . A Modern Approach*., 5th edition. W. W. Norton & Company, p. 63

En las gráficas 1.21 y 1.22 se puede ver que las curvas de indiferencia de esta función de utilidad no son homotéticas.

En la Gráfica 1.21 vemos que si sobreponemos una curva de indiferencia sobre otra, éstas NO van a coincidir en todos y cada uno de sus puntos.

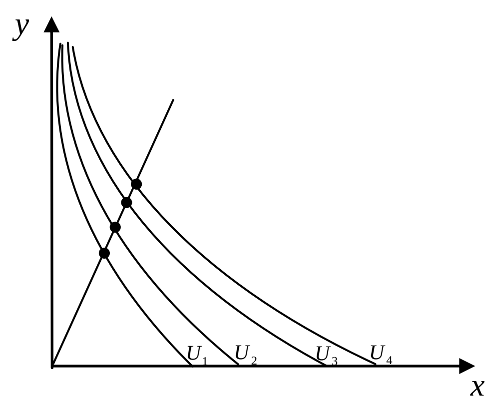
Gráfica 1.21



Si x=0 $\Rightarrow$ $U_0 = \ln(y)$
$\Rightarrow$ $y=e^{U_0}$ donde e^{U_0} es una constante.

En la Gráfica 1.22 vemos que un rayo (cualquiera) que parta del origen va a cortar a las curvas de indiferencia en puntos en donde sus pendientes (y por lo tanto sus TMS) no son iguales.

Gráfica 1.22



h) *CES* y sus casos especiales

La función $U(x,y) = A(\alpha x^{\rho} + \beta y^{\rho})^{\frac{\gamma}{\rho}}$ es conocida como función de utilidad de *elasticidad de sustitución constante* (*CES*, por sus siglas en Inglés), donde ρ ($\rho \leq 1$) es el parámetro de sustitución y γ el parámetro que determina el grado de homogeneidad de la función. Asimismo, A, α, β, γ son todas constantes positivas; donde α y β, representan las preferencias relativas que el individuo tiene por los bienes.

i) Grado de Homogeneidad

A continuación, vamos a ver que esta función de utilidad es homogénea de grado γ. Para ver si la función de utilidad *CES* es o no homogénea, se requiere multiplicar todas sus variables por una constante (λ) de tal forma que si ésta puede ser factorizada, la función es homogénea y el exponente al que se encuentre elevada dicha constante λ nos indicará el grado de homogeneidad de la función.

Sea $U(x,y) = A(\alpha x^{\rho} + \beta y^{\rho})^{\frac{\gamma}{\rho}}$

$$U(\lambda x, \lambda y) = A\ \ \alpha\ \ \lambda x\ ^{\rho} + \beta\ \ \lambda y\ ^{\rho}\ ^{\frac{\gamma}{\rho}} = A\ \ \alpha\lambda^{\rho} x^{\rho} + \beta\lambda^{\rho} y^{\rho}\ ^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

$$= A\ \ \lambda^{\rho}\ \ \alpha x^{\rho} + \beta y^{\rho}\ ^{\frac{\gamma}{\rho}} = A\left[\lambda^{\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}\ \ \alpha x^{\rho} + \beta y^{\rho}\ ^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

$$= A\lambda^{\gamma}\ \ \alpha x^{\rho} + \beta y^{\rho}\ ^{\frac{\gamma}{\rho}} = \lambda^{\gamma} U(x,y) \;\; \Rightarrow \text{ Homogénea de grado } \gamma$$

ii) Tasa Marginal de Sustitución

Ya sabemos que la *TMS* está dada por la razón de las utilidades marginales de los bienes. En el caso de la función de utilidad *CES*, las utilidades marginales de *x* e *y* son:

$$UMg_x = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{\gamma}{\rho} A \;\; \alpha x^{\rho} + \beta y^{\rho} \;\; ^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}} \; \rho \alpha x^{\rho-1}$$

$$UMg_y = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{\gamma}{\rho} A \;\; \alpha x^{\rho} + \beta y^{\rho} \;\; ^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}} \; \rho \beta y^{\rho-1}$$

Por tanto, la *TMS* es:

$$\boxed{TMS = \frac{\frac{\gamma}{\rho} A \;\; \alpha x^{\rho} + \beta y^{\rho} \;\; ^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}} \; \rho \alpha x^{\rho-1}}{\frac{\gamma}{\rho} A \;\; \alpha x^{\rho} + \beta y^{\rho} \;\; ^{\frac{\gamma-\rho}{\rho}} \; \rho \beta y^{\rho-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^{\rho-1} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\rho}}$$

…………[1.1]

A partir de la *TMS* puede verse que las preferencias son homotéticas, ya que dicha tasa depende exclusivamente de la razón de las cantidades de ambos bienes.

iii) Elasticidad de sustitución

La elasticidad de sustitución nos indica qué tan fácil es sustituir un bien por otro dentro de la función de utilidad. Dicha elasticidad está definida como:

$$\sigma = \frac{\Delta\% \;\; {}^{y}\!/_{x}}{\Delta\% TMS} = \frac{d \;\; y/x}{dTMS} \frac{TMS}{y/x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[1.2]$$

Si derivamos totalmente la *TMS* con respecto a y/x, tenemos que:

$$\frac{dTMS}{d \;\; y/x} = (1-\rho)\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[1.3]$$

De tal forma que si sustituimos la expresión 1.3 en 1.2 tenemos que:

$$\sigma = \frac{1}{(1-\rho)\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\rho}} \frac{\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\rho}}{\frac{y}{x}} \quad \text{...}[1.4]$$

Eliminando términos semejantes de la expresión 1.3, tenemos que la elasticidad de sustitución de una función de utilidad *CES* está dada por:

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{1-\rho}}$$

iv) Comportamiento de la *TMS*

Ahora nos interesa ver cómo es la curvatura de las funciones de utilidad y para eso necesitamos ver cómo cambia la *TMS* al cambiar *x*. Lo que necesitamos hacer entonces es derivar la *TMS* con respecto a *x*. Es importante notar que esta derivada es una derivada total, ya que un cambio en la *TMS* implica un cambio tanto en *x* como en *y*.

Al obtener la derivada total de la *TMS* respecto a *x*[18], utilizando $TMS = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^{\rho-1} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\rho}$ se tiene:

$$\left.\frac{dTMS}{dx}\right|_{U=U_0} = (1-\rho)\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\rho} \cdot \frac{y'x-y}{x^2}$$

En donde $y' = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{U=U_0} = -TMS \qquad \Rightarrow \left.\frac{dTMS}{dx}\right|_{U=U_0} = (1-\rho)\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\rho} \cdot \frac{-x\cdot TMS - y}{x^2}$

$$= -(1-\rho)\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\rho}\left(\frac{x\cdot TMS + y}{x^2}\right)$$

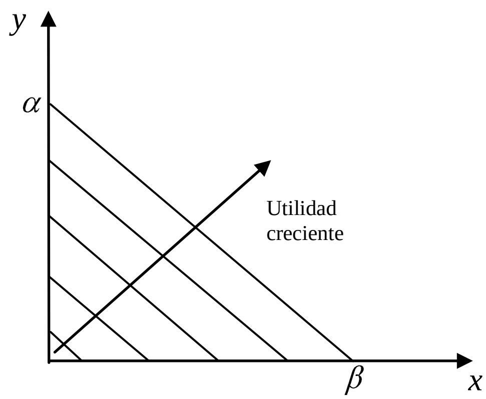
Cuyo signo, como puede apreciarse, dependerá del valor de ρ:

- Si $\rho < 1$ entonces $\left.\frac{dTMS}{dx}\right|_{U=U_0} < 0$. Es decir, la *TMS* es decreciente (Curvas de indiferencia son estrictamente convexas)

[18] Ver nota a pie de página de Nicholson (2005) p. 81

- Si $\rho = 1$, entonces $\left.\dfrac{dTMS}{dx}\right|_{U=U_0} = 0$. Es decir, la *TMS* es constante e igual a α/β; por tanto, como se muestra en la Gráfica 1.23, las curvas de indiferencia son convexas (mas no estrictamente) es decir, serán líneas rectas con pendiente constante e igual en valor absoluto a α/β. Lo anterior, implica que un individuo que posea este tipo de preferencias estará dispuesto a intercambiar la misma cantidad de un bien por otro, independientemente de las cantidades relativas de los bienes; es decir, los bienes *x* e y son perfectos sustitutos. En este caso, la elasticidad de sustitución es infinita o indeterminada ($\sigma = \infty$).

Gráfica 1.23



Ejemplo:

A Jorge le gusta consumir tortas de milanesa (*M*) y tacos al pastor (P). Si el está indiferente entre consumir tres tortas de milanesa y ocho tacos al pastor, entonces su función de utilidad entre estos bienes es de sustitutos perfectos y tiene la siguiente forma:

$$U(M,P) = \alpha M + \beta P$$

En términos de la función de utilidad, el enunciado anterior implica que

$$U(3,0) = U(0,8)$$

$$\left.\begin{array}{l} U(3,0) = 3\alpha \\ \\ U(0,8) = 8\beta \end{array}\right\} \; 3\alpha = 8\beta \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{\beta} = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = 8 \\ \beta = 3 \end{array}\right.$$

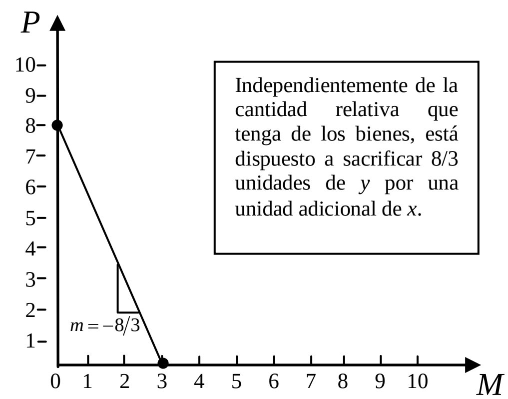
Ello implica que nuestra función de utilidad es:

$$\boxed{U(M,P) = 8M + 3P}$$

Además, $TMS = \dfrac{UMg_M}{UMg_P} = \dfrac{\partial U/\partial M}{\partial U/\partial P} = \dfrac{\alpha}{\beta} = 8/3 = 2.6$

Gráficamente se tiene lo siguiente:

Gráfica 1.24



- Si $\rho \to -\infty$, entonces tenemos el caso de perfectos complementos.

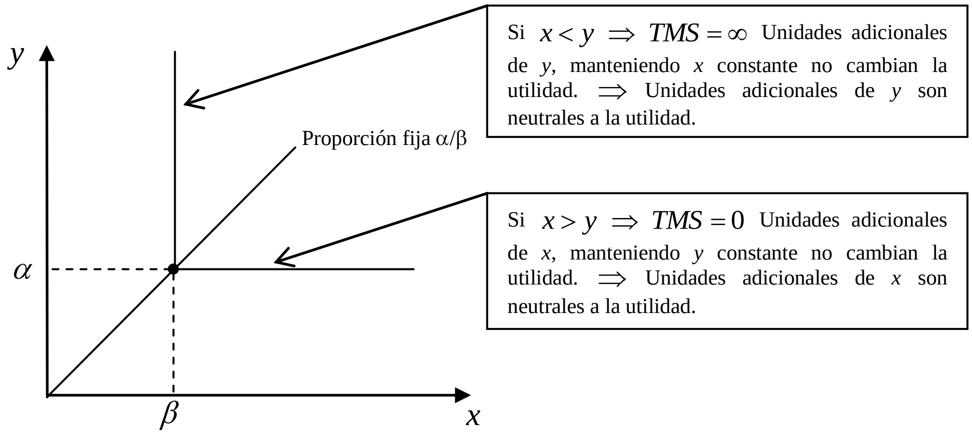
la *TMS* de la función de utilidad *CES* está dada por $\dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\rho-1}$

De esta forma, tenemos que si $\rho \to -\infty$:

$$TMS = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\infty} \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x > y \Rightarrow TMS \to 0; \\ \text{Si } x < y \Rightarrow TMS \to \infty. \end{cases}$$

En este caso, los bienes *x* e *y* son complementos perfectos y la elasticidad de sustitución es cero ($\sigma = 0$). Gráficamente se tiene lo siguiente:

Gráfica 1.25



Este tipo de preferencias se presentan cuando existen bienes que son consumidos conjuntamente; es decir, en una proporción fija; por ejemplo, zapatos derechos y zapatos izquierdos. En este sentido, la utilidad se incrementará solamente si el consumo conjunto de estos bienes aumenta en dicha proporción, aunque cabe mencionar, como se verá en el ejemplo siguiente, que la proporción no siempre es uno a uno.

Matemáticamente, la función de utilidad de perfectos complementos se representa como $U(x,y) = \min\{\alpha x, \beta y\}$, donde nuevamente α y β son constantes positivas que representan las preferencias relativas y el operador *min* implica que el nivel de utilidad está dado por el menor de los dos términos αx y βy.

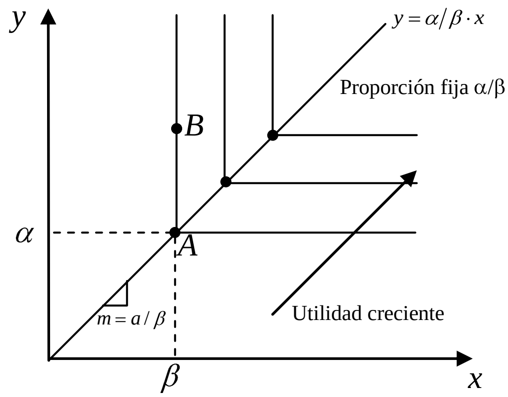
Como se puede apreciar en la Gráfica 1.26, las curvas de indiferencia de perfectos complementos poseen forma de *L*, en cuyos vértices sucede $\alpha x = \beta y$; lo cual implica que no hay exceso de ninguno de los bienes. De tal manera que al igualar $\alpha x = \beta y$ y resolviendo para *y*, obtenemos:

$$\boxed{y = (\alpha/\beta)\, x}$$

Esta es la ecuación de una recta que parte del origen con pendiente α / β. El consumo de los bienes siempre se va a dar sobre este rayo y en los vértices de las curvas de indiferencia; por ejemplo, en un punto como *A*. De esta forma no tendría sentido que el individuo consumiera en una proporción que no fuera justamente α / β, por ejemplo en un punto como *B*, ya no le proporcionaría más utilidad. [19]

[19] Esto se ampliará más adelante en el Capítulo Tercero de optimización en el consumo, en la parte correspondiente al caso de perfectos complementos.

Gráfica 1.26



Ejemplo:

Bernardo consume siempre café soluble (C) con leche en polvo (L) y no toma café si no cuenta con leche en polvo, ni consume leche en polvo si no cuenta con café soluble. Es decir, la leche y el café son complementos perfectos de la forma $U(C,L)=\min\{\alpha C,\beta L\}$. Por cada cuatro cucharadas de café soluble usa cinco cucharadas de leche en polvo.

Vamos a encontrar la función de utilidad de Bernardo si $C=4$ y $L=5$.

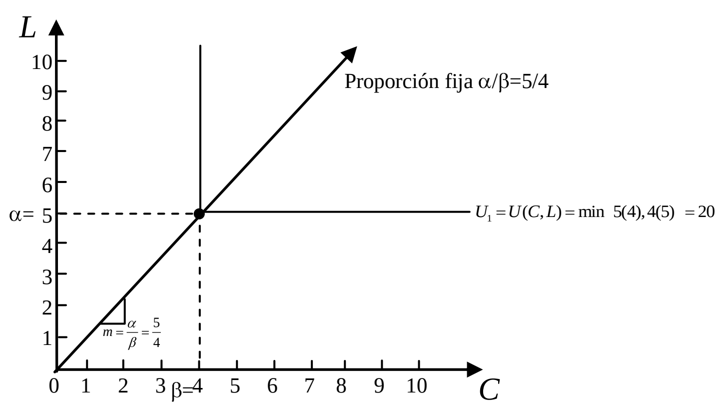
La condición del vértice establece que:

$$\alpha C=\beta L \quad\Rightarrow\quad \alpha/\beta=L/C \quad\Rightarrow\quad \alpha/\beta=5/4 \quad\Rightarrow\quad \alpha=5 \text{ y } \beta=4.$$

Entonces la función de utilidad de Bernardo está dada por $U(C,L)=\min\{5C,4L\}$.

Finalmente, en la Gráfica 1.27 se puede ver que el vértice de la curva de indiferencia yace en $(\beta,\alpha)=(5,4)$, donde sucede también $\alpha C=\beta L$.

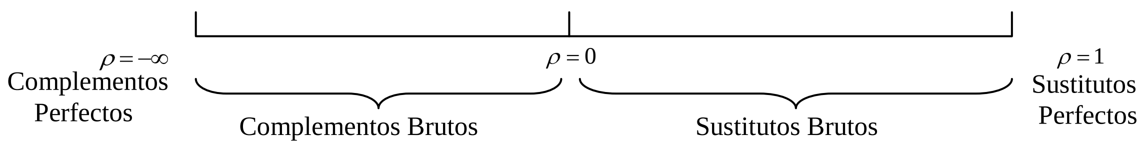
Gráfica 1.27



- Si $\rho \to 0$, la ecuación 1.1 queda como $TMS = \frac{\alpha}{\beta}\frac{y}{x}$ que es la *TMS* de la función de utilidad Cobb-Douglas vista con anterioridad. Además, esta tasa es decreciente, ya que $\left.\frac{dTMS}{dx}\right|_{U=U_0} < 0$ y por tanto las curvas de indiferencia son estrictamente convexas. Es decir, si $\rho \to 0$ la función de utilidad *CES* produce una función de utilidad Cobb-Douglas. En este caso la elasticidad de sustitución es igual a la unidad ($\sigma = 1$).

De esta forma, la función de utilidad *CES* nos ofrece, a través del valor del parámetro de sustitución (ρ), el espectro que se ilustra en la Gráfica 1.28.

Gráfica 1.28



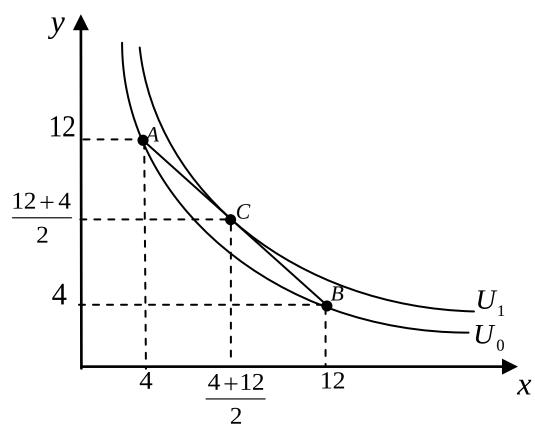
- Si $\rho > 1$ entonces $\left.\frac{dTMS}{dx}\right|_{U=U_0} > 0$. Es decir, la *TMS* es creciente. (Curvas de indiferencia son cóncavas). Precisamente para evitar estos casos desde el principio la función de utilidad *CES* se define para $\rho \leq 1$.

iii) Ejemplos y ejercicios adicionales

1. Las preferencias de Carmen son estrictamente convexas y es indiferente entre dos canastas (x, y), $A = (4,12)$ y $B = (12,4)$. Ahora si Carmen tuviera acceso a una tercera canasta $C = (8,8)$ ¿cómo compara ésta con respecto a las canastas *A* y *B*? ¿Es indiferente Carmen entre *A* y *C* ó entre *B* y *C*?

   Recordemos que la estricta convexidad al origen de las curvas de indiferencia, implica que el consumidor siempre preferirá un consumo balanceado. Si Carmen es indiferente entre las canastas *A* y *B*, ello implica que éstas constituyen canastas extremas de una misma curva de indiferencia (U_0). Entonces, como se puede apreciar en la Gráfica 1.29, si dibujamos las canastas *A* y *B*, encontraremos que la canasta *C* es en realidad un promedio de ambas canastas *A* y *B*, que le permitiría alcanzar una curva de indiferencia más alta (U_1), luego entonces, para Carmen la canasta *C* es estrictamente preferida a las canastas *A* y *B*.

Gráfica 1.29



2. A Samuel le gustan más las tortas de milanesa que los sopes. Entre los sopes y las gorditas es indiferente pero prefiere las gorditas que las tortas de milanesa. ¿Qué se puede decir sobre estas preferencias?

   El enunciado nos dice que: $\textit{Tortas de Milanesa} \succ \textit{Sopes}$

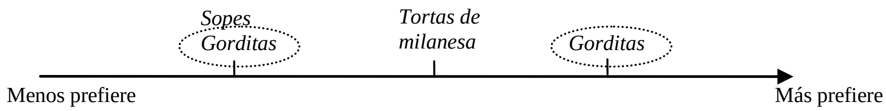
   Adicionalmente nos dice que: $\textit{Sopes} \sim \textit{Gorditas}$

   Por transitividad: $\textit{Tortas de Milanesa} \succ \textit{Gorditas}$

   Sin embargo, también el enunciado nos dice que: $\textit{Gorditas} \succ \textit{Tortas de Milanesa}$

   Por lo que se trata de preferencias no transitivas, ya que las gorditas no pueden estar en dos lugares al mismo tiempo, como se ilustra en la Gráfica 1.30 a continuación:

Gráfica 1.30



3. Si las preferencias de un individuo que consume sólo dos bienes muestran una Tasa Marginal de Sustitución constante, ¿cómo son las utilidades marginales de los bienes? ¿Qué forma poseen las curvas de indiferencia?

   Una *TMS* constante entre dos bienes quiere decir que para el consumidor ambos bienes son perfectos sustitutos, las utilidades marginales de cada bien son constantes y las curvas de indiferencia serán convexas (mas no estrictamente); es decir, serán líneas rectas con pendiente constante e igual en valor absoluto a α / β, por lo que una combinación lineal entre dos canastas no es más preferida que las canastas originales.

4. Las funciones de utilidad de Alejandro (*A*) y Berenice (*B*) entre los refrescos (bien *x*) y las bebidas energéticas (bien *y*) son $U_A(x_A, y_A) = (x_A^\rho + y_A^\rho)^{1/\rho}$; donde $\rho = 1$ y $U_B(x_B, y_B) = (x_B^\rho + y_B^\rho)^{1/\rho}$; donde $\rho = 0$. ¿Cómo comparan ambas *TMS* si ambos consumen 10 refrescos y 10 bebidas energéticas?

5. Si *x* e *y* son males, ¿cómo son las curvas de indiferencia entre ellos?

6. Verónica consume jícamas (*J*) y betabeles (*B*) y siempre le da la misma utilidad consumir 10 jícamas que 2 betabeles. Determine la función de utilidad de Verónica.