EXAMEN DEPARTAMENTAL DE INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

16 de Marzo de 2007

Nombre: ______________________________ Clave: ________________

Tipo **A**.

1. Factoriza completamente la expresión: $\left(a^2+2a\right)^2-2\left(a^2+2a\right)-3$

   .... 1.5 puntos.

2. Resuelve la desigualdad: $|2x-|x+1||>10$

   .... 1.5 puntos.

3. Resuelve la ecuación: $\left|x^2-4x\right|=2x^2-4$.

   .... 1.5 punto.

4. ¿Para qué valores del parámetro m, las raíces x_1, x_2 de la ecuación $x^2-3mx+m^2=0$ cumplen con la condición $x_1^2+x_2^2<7$?

   .... 2 puntos.

5. Encuentra todos los valores de a para los cuales la distancia entre los puntos $P_1=(a,3)$ y $P_2=(5,2a)$ es mayor que $\sqrt{26}$

   .... 1.5 punto.

6. La ecuación de una circunferencia es $x^2+y^2+4x-10y=16$. Dado el punto $P=(1,-1)$ sobre la circunferencia, determina el punto diametralmente opuesto a P.

   .... 2 puntos.

1. Factoriza
$$\left(a^2+2a\right)^2-2\left(a^2+2a\right)-3 \tag{1}$$
Sea $x=a^2+2a$. Substituyendo en (1) obtenemos:

$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ y substituyendo nuevamente tenemos:

$\left(a^2+2a\right)^2-2\left(a^2+2a\right)-3=\left(a^2+2a+1\right)\left(a^2+2a-3\right)$ y si ahora factorizamos las dos nuevas expresiones tenemos

$\left(a^2+2a\right)^2-2\left(a^2+2a\right)-3=(a+1)^2(a+3)(a-1)$.

2. $|2x-|x+1||>10 \Longrightarrow 2x-|x+1|>10$ o $2x-|x+1|<-10$.

Caso 1- $2x-|x+1|>10$

Región 1 $x\geq -1$

$2x-|x+1|>10 \Longrightarrow 2x-(x+1)>10 \Longrightarrow x>11$.

Por lo tanto en la primera región, la solución es $(11,\infty)$.

Región 2 $x<-1$

$2x-|x+1|>10 \Longrightarrow 2x-(-x-1)>10 \Longrightarrow 3x+1>10 \Longrightarrow x>3$ y como $x<-1$, no hay soluciones en esta región

Caso 2- $2x-|x+1|<-10$

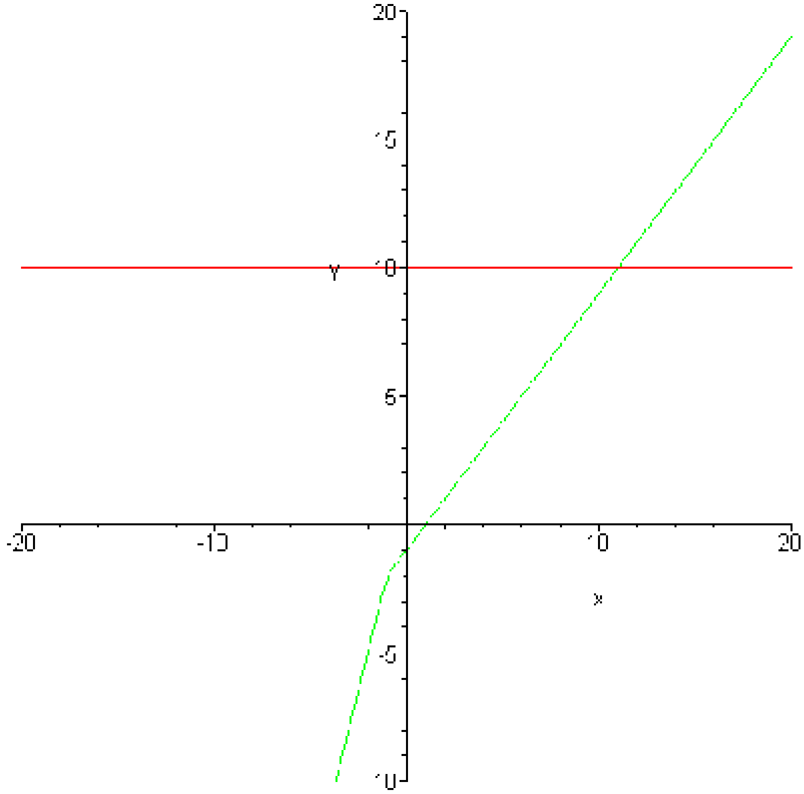
Región 1 $x\geq -1$

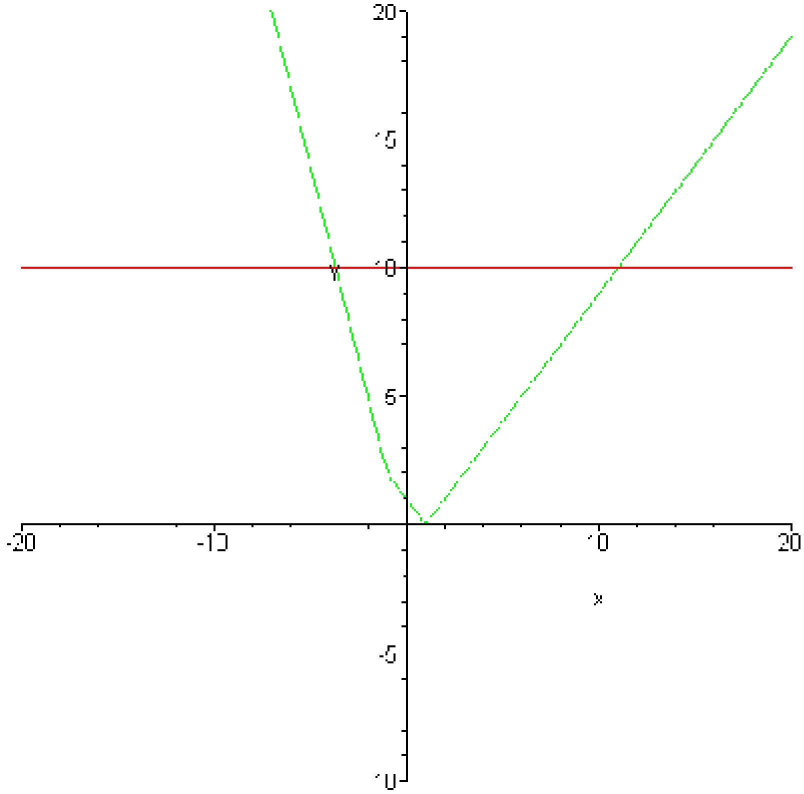
$2x-|x+1|<-10 \Longrightarrow 2x-(x+1)<-10 \Longrightarrow x<-9$ y como $x\geq -1$, no hay solución en esta región.

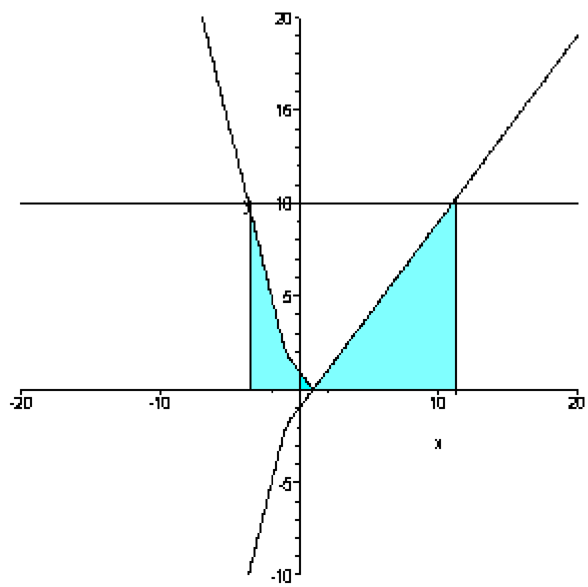
Región 2 $x<-1$

$2x-|x+1|<-10 \Longrightarrow 2x-(-x-1)<-10 \Longrightarrow 3x+1<-10 \Longrightarrow 3x<-11 \Longrightarrow x<\dfrac{-11}{3}$ y como $x<-1$, la solución en esta región es $\left(-\infty,\dfrac{-11}{3}\right)$

Juntando las soluciones tenemos que la solución de la desigualdad es $\left(-\infty,\dfrac{-11}{3}\right)\cup(11,\infty)$


20
15
10
5
-5
-10
y
-20
-10
10
20
x





Gráfica 1 $y = 2x - |x+1|$ gráfica 2 $y = |2x - |x+1||$

3. Resuelve $\left|x^2 - 4x\right| = 2x^2 - 4$

   Región 1 $x^2 - 4x \geq 0$, e.d. $x\,(x-4) \geq 0$,
   $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

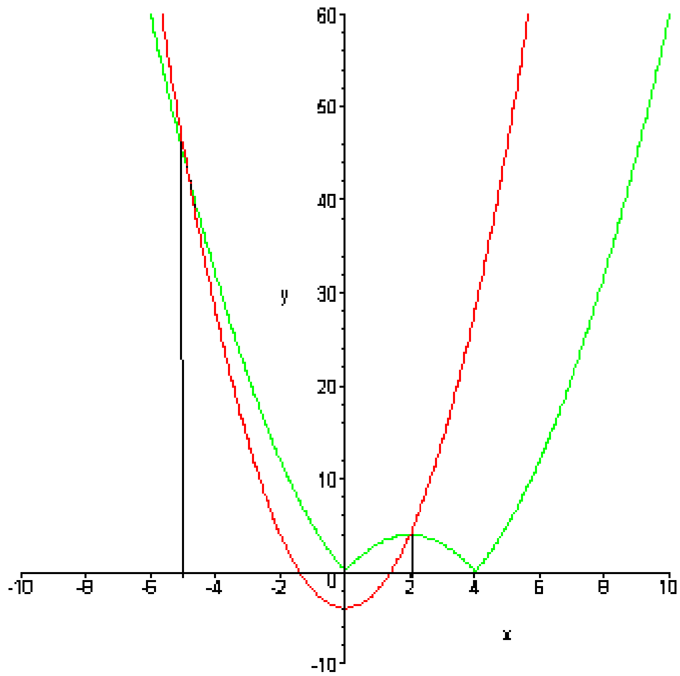
Si $x \in (-\infty, 0)$, entonces $\left|x^2 - 4x\right| = 2x^2 - 4 \Longleftrightarrow x^2 - 4x = 2x^2 - 4 \Longleftrightarrow -4x = x^2 - 4 \Longleftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = -2\sqrt{2} - 2$ o $x = 2\sqrt{2} - 2$ y como $x < 0$ o $x \geq 4$, la solución en esta región es $x = -2\sqrt{2} - 2$.

Región 2 $\quad x^2 - 4x < 0$, e.d. $x(x-4) < 0$,

$(0, 4)$

Si $x \in (0, 4)$, entonces $\left|x^2 - 4x\right| = 2x^2 - 4 \Longleftrightarrow -x^2 + 4x = 2x^2 - 4 \Longleftrightarrow 4x = 3x^2 - 4 \Longleftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$ o $x = 2$ y como $x \in (0, 4)$, la solución en esta región es $x = 2$.

Juntando tenemos que las soluciones son $x = 2$ o $x = -2\sqrt{2} - 2$



4. Sean x_1, x_2 las raíces de la ecuación $x^2 - 3mx + m^2 = 0$. Como el coeficiente principal de la ecuación es 1, la factorización de la expresión es

$x^2 - 3mx + m^2 = (x - x_1)(x - x_2)$, con lo cual $3m = x_1 + x_2$ y $m^2 = x_1 x_2$.

$9m^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2m^2 \Longleftrightarrow 7m^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Con esto llegamos a

$x_1^2 + x_2^2 < 7 \Longleftrightarrow 7m^2 < 7 \Longleftrightarrow m^2 < 1 \Longleftrightarrow m \in (-1, 1)$.

Camino 2.

las raíces de $x^2 - 3mx + m^2 = 0$ son

$x = \dfrac{3m \pm \sqrt{9m^2 - 4m^2}}{2}$, de donde $x_1 = \dfrac{3m + \sqrt{5}\,|m|}{2}$ y $x_2 = \dfrac{3m - \sqrt{5}\,|m|}{2}$

Si $m \geq 0, x_1 = \dfrac{3m + \sqrt{5}m}{2}$ y $x_2 = \dfrac{3m - \sqrt{5}m}{2}$

y si $m < 0, x_1 = \dfrac{3m - \sqrt{5}m}{2}$ y $x_2 = \dfrac{3m + \sqrt{5}m}{2}$, por lo que el signo de m sólo cambia el orden de las raíces.

$x_1^2 + x_2^2 < 7 \Longleftrightarrow \left(\dfrac{3m - \sqrt{5}m}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3m + \sqrt{5}m}{2}\right)^2 < 7 \Longleftrightarrow \dfrac{18m^2 + 10m^2}{4} < 7 \Longleftrightarrow m^2 < 7 \Longleftrightarrow m^2 < 1 \Longleftrightarrow m \in (-1, 1)$.

5. Sean $P_1 = (a, 3)$ y $P_2 = (5, 2a)$

   La distancia d de P_1 a P_2 es $d = \sqrt{(a-5)^2 + (3-2a)^2}$.

   $d > \sqrt{26} \Longleftrightarrow d > 0$ y $d^2 > 26$ y substituyando tenemos que $(a-5)^2 + (3-2a)^2 > 26 \Longleftrightarrow a \in \left(-\infty, \dfrac{2}{5}\right) \cup (4, \infty)$

   $(a-5)^2 + (3-2a)^2 = 5a^2 - 22a + 34 > 26 \Longrightarrow 5a^2 - 22a + 8 > 0$, Solution is: $(4, \infty) \cup \left(-\infty, \dfrac{2}{5}\right)$,