# EXAMEN FINAL DE INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

miércoles 8 de diciembre de 2004

Nombre: __________________________________ Clave: ______________

Duración del examen 2.5 horas
No se permiten calculadoras graficadoras **Tipo B**

1. Encuentra el polinomio $f(x)$ de cuarto grado con coeficientes enteros, $1, -1, -2, -\frac{1}{2}$ sus raíces y $f(0) = -14$ ............ 1 punto.

2. Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 5x}}$ ............ 1.5 puntos.

3. Obtén $(f \circ g)(x)$ si $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -x^3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ ....... 1.5 puntos.

4. Sea $g(x) = 3 - 4x$. Determina una función $f(x)$ tal que $(g \circ f)(x) = \dfrac{2x+3}{4-x}$ ............ 1.5 puntos.

5. Dada la siguiente función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 4x}$ determina:
   a. El dominio y la imagen
   b. Los intervalos en los que la función es positivo o negativa
   c. Las asíntotas
   d. La gráfica. de la función. ............ 2 puntos

6. Dibuja la gráfica de $f(x) = 3\cos(2x - \pi)$ indicando amplitud, fase y período. ............ 1 punto

7. Sea $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$. Prueba que:
   a. $f$ es una función inyectiva
   b. $7 \in \operatorname{Im}(f)$ y $2 \notin \operatorname{Im}(f)$
   c. existe $g : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{-3\}$ tal que $g$ es la inversa de $f$. ............ 1.5 puntos

1. $f(x) = k(x-1)(x+1)(x+2)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

   $f(x) = \dfrac{5}{2}kx^3 - \dfrac{5}{2}kx - k + kx^4$

   $f(0) = -k = -14 \Longrightarrow k = 14$ por lo tanto $f(x) = 14(x-1)(x+1)(x+2)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) =$
   $35x^3 - 35x + 14x^4 - 14 =$

2. $\dfrac{-x^2+6x-9}{x^2+5x} = -\dfrac{x^2-6x+9}{x(x+5)} = -\dfrac{(x-3)^2}{x(x+5)}$ por lo que solo se necesita encontrar los números reales tales que $\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{x+5} < 0$ y éste es $(-5,0) \cup \{3\}$

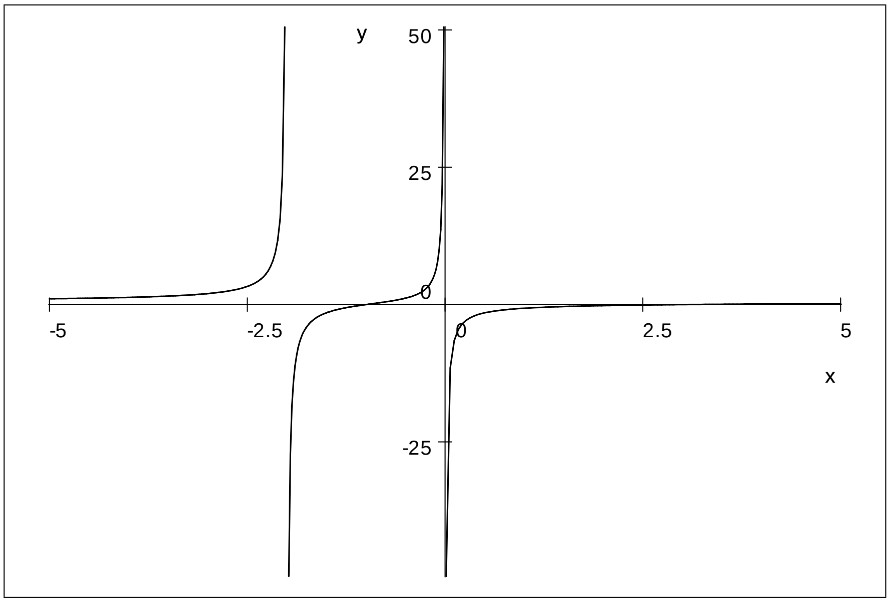
3. Si $x < 0$, $g(x) = \sqrt{-x} > 0$ y por lo tanto $f(g(x)) = \dfrac{1}{g(x)^2} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{-x}\right)^2} = \dfrac{1}{-x}$.

   Si $x = 0$, $g(0) = 0$ y $f(g(0)) = f(0) = -0 = 0$
   si $x > 0$, entonces $g(x) = -x^3 < 0$ y $f(g(x)) = f\left(-x^3\right) = x^3$

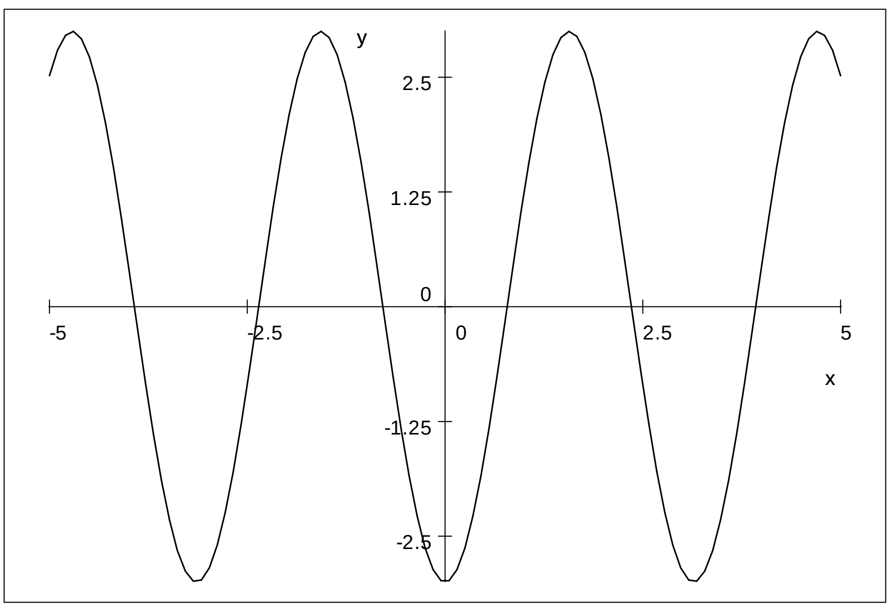
4. $g(f(x)) = 3 - 4f(x) = \dfrac{2x+1}{7-3x} \Longrightarrow f(x) = \dfrac{11x-20}{12x-28}$

5. $\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+4x} = \dfrac{(x-3)((x+1)}{2x(x+2)}$

   dominio $\mathbb{R} - \{0,-2\}$
   Imagen $\mathbb{R}$
   Positiva $(-\infty,2) \cup (-1,0) \cup (3,\infty)$
   cero $3,-1$
   negativa $(-2,-1) \cup (0,3)$
   asíntotas en $x = 0, x = -2$
   $\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+4x}$




6. $f(x) = 3\cos(2x - \pi)$




7. $\dfrac{2x+1}{x+3} = \dfrac{2y+1}{y+3} \Longrightarrow (2x+1)(y+3) = (2y+1)(x+3) = 6x+y+2xy+3 = x+6y+2xy+3 \Longrightarrow$ $5x = 5y \Longrightarrow x = y$

$$\frac{2x+1}{x+3} = y \Longrightarrow 2x+1 = xy+3y \Longrightarrow x(2-y) = 3y-1 \Longrightarrow x = \frac{3y-1}{2-y} \text{ si } y \neq 2$$

Por lo que $7 \in \operatorname{Im}(f)$, $2 \notin \operatorname{Im}(f)$ y $g(x) = \dfrac{3x-1}{2-x}$ es la inversa de $f$