

En esta nota (optativa), demostramos una formula importante para dimensiones de intersecciones (tambien buen ejercicio para practicar con la estructura/definiciones formal de espacios vectorial). Entonces, en lo que sigue, sea V algun espacio vectorial (real) de dimension finita. Primer tenemos:

Definition 1. Para $U, U' \subset V$ dos subespacios entonces

$$U + U' := \text{span}\{U \cup U'\} = \bigcap_{U \cup U' \subset S \subset V} S$$

es el mas pequeño subespacio de V que contiene U y U' .

Nuestro objetivo en este nota es la siguiente formula de intersección:

Theorem 1. Sea $U, U' \subset V$ dos subespacios. Entonces:

$$\dim(U + U') = \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U'). \quad (1)$$

EJERCICIO.

Verifica que la formula de interseccion tiene sentido para los varios casos de:

- dos lineas en $\mathbb{R}^3$,
- una linea, y un plano en $\mathbb{R}^3$,
- dos planos en $\mathbb{R}^3$.

Remark. Que $U + U' \subset V$ es un subespacio siempre tenemos $\dim(U + U') \leq \dim V$. Una consecuencia importante es cuando $\dim U + \dim U' > \dim V$ entonces necesariamente $\dim U \cap U' > 0$, en particular para tal situacion estamos seguro que la interseccion de tales subespacios no es trivial (mas que solo $\mathbf{0}$).

Proof. (theorem 1). La formula (1) seria consecuencia de los Lemmas siguientes:

Lemma 1. $U + U' = \{\mathbf{u} + \mathbf{u}' : \mathbf{u} \in U, \mathbf{u}' \in U'\}$.

Lemma 2 (extension de base). Si $U, \tilde{U}$ son dos subespacios de V (dimension finita) con $U \subset \tilde{U}$ entonces para cualquier base $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ de U , existe un base $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_l$ de $\tilde{U}$.

Ver abajo para demostraciones de las Lemmas.

Aceptando las Lemmas, establacemos (1) en la siguiente manera. Que cualquier interseccion de subespacios es un subespacio, sea

$$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$$

¹Connor Jackman, connor.jackman@itam.mx, 9.2026

algun base para el subespacio $U \cap U' = W$. Que $W \subset U$ tenemos (lemma 2) una extension a algun base

$$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$$

de U . De mismo manera ($W \subset U'$) hay algun extension a algun base

$$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l, \mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_m$$

de U' . Ahora afirmamos que

$$(*) \quad \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_m$$

es un base para $U + U'$. A saber, tenemos:

- $(*)$ estan independientes: si

$$\mathbf{0} = a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_l \mathbf{w}_l + b_1 \mathbf{u}_1 + \dots + b_k \mathbf{u}_k + b'_1 \mathbf{u}'_1 + \dots + b'_m \mathbf{u}'_m$$

entonces tenemos:

$$b'_1 \mathbf{u}'_1 + \dots + b'_m \mathbf{u}'_m = -(a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_l \mathbf{w}_l + b_1 \mathbf{u}_1 + \dots + b_k \mathbf{u}_k) \in U \cap U'$$

ya que esta en U' (que todos los $\mathbf{u}'_*$ estan) y tambien esta en U (que todos los $\mathbf{w}_*$ estan en U y tambien todos los $\mathbf{u}_*$). En particular, que los $\mathbf{w}_*$ son un base para $U \cap U'$, podemos escribir

$$b'_1 \mathbf{u}'_1 + \dots + b'_m \mathbf{u}'_m = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_l \mathbf{w}_l$$

para algunos coeficientes $\alpha_* \in \mathbb{R}$. Pero $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l, \mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_m$ son un base para U' y estan, en particular, independiente. Entonces tenemos $b'_1 = 0, \dots, b'_m = 0, \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_l = 0$. Ahora la ecuacion original con todos los $b'_* = 0$ esta:

$$\mathbf{0} = a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_l \mathbf{w}_l + b_1 \mathbf{u}_1 + \dots + b_k \mathbf{u}_k$$

y, ya que $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ son un base para U estan independiente, implica que tambien todas las $a_* = 0$ y $b_* = 0$.

- $(*)$ generan $U + U'$. Esto sigue de Lemma 1. A saber que $\text{span}\{(*)\}$ contiene U y U' tenemos $U + U' \subset \text{span}\{(*)\}$. Para la otra direccion notar que cualquier combinacion lineal de elementos de $(*)$ es algun suma apropiado de un elemento de U con uno de U' , es decir (segun Lemma 1) un elemento de $U + U'$.

Entonces, ahora que $(*)$ es un base para $U + U'$ tenemos:

$$\dim(U + U') = l + k + m$$

donde $\dim U \cap U' = l$, $\dim U = l + k$, $\dim U' = l + m$ que esta la formula (1) anunciado:

$$\dim(U + U') = (l + k) + (l + m) - l = \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U').$$

□

Ahora demostramos las dos Lemmas arriba:

Proof. (Lemma 1) Tenemos que verificar que $\tilde{U} = \{\mathbf{u} + \mathbf{u}' : \mathbf{u} \in U, \mathbf{u}' \in U'\}$ es (a) un subespacio de V , y, (b) cualquier subespacio de V que contiene U y U' tambien contiene $\tilde{U}$.

Para (a) tenemos directo de: $a(\mathbf{u} + \mathbf{u}') = a\mathbf{u} + a\mathbf{u}'$ y $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}'_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}'_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2)$ que $\tilde{U}$ esta cerrado bajo multiplicacion escalar y sumas vectorial, es decir que si $\tilde{U}$ es un subespacio.

Para (b) notamos que cualquier subespacio de V que contiene U y U' tambien tiene que ser cerrado bajo sumas vectorial, es decir necesariamente contiene cualquier suma $\mathbf{u} + \mathbf{u}'$ donde $\mathbf{u} \in U$ y $\mathbf{u}' \in U'$, es decir contiene $\tilde{U}$.

Estas propiedades (a), (b) establece que $\tilde{U}$ es lo mas pequeno subespacio que contiene U y U' , es decir que segun definicion 1, tenemos $U + U' = \tilde{U} = \{\mathbf{u} + \mathbf{u}' : \mathbf{u} \in U, \mathbf{u}' \in U'\}$. $\square$

Proof. (Lemma 2) Sea $U \subset \tilde{U}$ dos subespacios (dimension finita) con $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ algun base de U . Que $\tilde{U}$ esta de dimension finita, existe un numero finita de generadores $\tilde{U} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l\}$ y, ya que $U \subset \tilde{U}$, tambien tenemos:

$$\tilde{U} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l\}.$$

Ahora la idea que justifica la lemma es que $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ ya son independientes y entonces, comenzando de $\mathbf{v}_1$, vamos quitando los $\mathbf{v}_*$'s que son dependientes de los elementos en la lista a la izquierda hasta que terminamos con una lista de generadores de $\tilde{U}$ que son independientes y aun generan $\tilde{U}$ (es decir un base).

Para una demostracion formal usamos induccion.

Primer notar que cuando $U = \tilde{U}$, no hay nada demostrar (ya $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ es un base para $U = \tilde{U}$ y no hay ningun necesidad de extender).

Hacemos induccion en la co-dimension $\dim \tilde{U} - \dim U = p \in \{0, 1, \dots, \dim \tilde{U}\}$, es decir para subespacios con $\dim U = \dim \tilde{U} - p$.

Entonces suponer (hipotesis induccion) que para cualquier subespacio $U \subset \tilde{U}$ con $\dim U = \dim \tilde{U} - p$ (y $p \in \{0, 1, \dots, \dim \tilde{U} - 1\}$) la Lemma de extension esta valido y considera un subespacio $W \subset \tilde{U}$ con $\dim W = \dim \tilde{U} - p - 1$. Entonces, que $\dim W < \dim \tilde{U}$, hay algún $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{U} \setminus W$. Para $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$ un base de W , afirmamos que

$$(*) \quad \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l, \tilde{\mathbf{u}}$$

son independientes. A saber si $\mathbf{0} = a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_l \mathbf{w}_l + b \tilde{\mathbf{u}}$ entonces necesitamos $b = 0$ (si $b \neq 0$, implicaria que $\tilde{\mathbf{u}} \in W$) y ahora que $b = 0$ entonces por independencia de los $\mathbf{w}_*$'s tenemos tambien todos los $a_1 = 0, \dots, a_l = 0$. Es decir que si, (*) son independientes. Entonces $\tilde{W} = \text{span}\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l, \tilde{\mathbf{u}}\} \subset \tilde{U}$ es un subespacio de dimension $\dim \tilde{W} = \dim W + 1$, es decir $\dim \tilde{U} - \dim \tilde{W} = p$, y por hipotesis de induccion podemos extender la base $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l, \tilde{\mathbf{u}}$ de $\tilde{W}$ a algun base de $\tilde{U}$, y entonces tambien podemos extender el base $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$ a un base de $\tilde{U}$, lo que completa la induccion. $\square$