

QUIZ 3 (ÁLGEBRA LINEAL): 22.9.26

1. Considere los siguientes cuatro vectores en $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

¿Son linealmente independientes o dependientes? En caso de que sean dependientes, determine una relación no trivial entre ellos.

2. Verdadero o Falso:

- (a) Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{R}^n \setminus S$ puede ser un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
- (b) Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{R}^n \setminus S$ nunca es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
- (c) Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ son tres vectores linealmente independientes en un espacio vectorial, entonces $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ nunca son dependientes.
- (d) Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ son tres vectores linealmente independientes en un espacio vectorial, entonces $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ pueden ser dependientes.
- (e) Para una matriz A con columnas $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$, la matriz A tiene rango n si y solo si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ son linealmente independientes.
- (f) Para una matriz A con columnas $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$, la matriz A tiene rango m si y solo si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ son linealmente independientes.

SOLUCIONES

1. Los vectores son independientes cuando el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (donde las columnas de A son $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$) tiene únicamente la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$), y dependientes cuando hay soluciones no-triviales. Esto decidimos aplicando Gauss-Jordan para reducir a FER:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & -5/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que este sistema homogéneo tiene dos variables libres, entonces admite soluciones no-triviales; es decir, los vectores son *dependientes*.

Para encontrar una relación no-trivial entre estos vectores dependientes, usamos la FER arriba para tener la solución general al sistema homogéneo $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 + x_4\vec{v}_4 = \vec{0}$ es:

$$x_1 = -\frac{4}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4, \quad x_2 = \frac{5}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4$$

o con vectores: $-(4x_3 + 5x_4)\vec{v}_1 + (5x_3 + 4x_4)\vec{v}_2 + 3x_3\vec{v}_3 + 3x_4\vec{v}_4 = \vec{0}$ para cualquier elección de $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, con $x_3 = 0$ y $x_4 = 1$ obtenemos la relación explícita:

$$-5\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 + 3\vec{v}_4 = \vec{0}.$$

2. (a) Falso: todo subespacio debe contener al menos el vector zero. Entonces su complemento nunca contiene al vector zero y, en consecuencia, el complemento de un subespacio nunca puede ser un subespacio.
- (b) Verdadero: por la misma razón expuesta en (a).
- (c) Verdadero: si $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ fueran dependientes, también lo serían $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ($c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = \vec{0} \implies c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}$).
- (d) Falso: por la misma razón expuesta en (c).
- (e) Falso: si $m > n$, esta matriz A con m columnas y rango $n < m$ tiene $m - n$ variables libres (mas que zero). Entonces $x_1\vec{v}_1 + \dots + x_m\vec{v}_m = \vec{0}$ admite soluciones no triviales.
- (f) Verdadero: esta matriz A con m columnas tiene rango m exactamente cuando no hay variables libres; es decir, cuando $x_1\vec{v}_1 + \dots + x_m\vec{v}_m = \vec{0}$ tiene solución única, a saber, la solución trivial $x_1 = 0, \dots, x_m = 0$.