

QUIZ 5 (REPASO ÁLGEBRA LINEAL): 27.10.26

1. Considera los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

¿Es $\mathbf{b} \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$? En caso afirmativo, encuentra todas las combinaciones lineales de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ que producen $\mathbf{b}$.

2. ¿Cuáles colecciones de vectores, tomadas de $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ en # 1, pueden ser una base para $\mathbb{R}^3$?

COMENTARIO: Hay cuatro posibles listas de tres vectores tomadas de estas cuatro: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$, o $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$.

3. Determina para cuáles valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ la siguiente matriz es invertible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) En caso de que A no sea invertible, determina su rango y nulidad.
- (ii) En caso de que A sea invertible, determina su matriz inversa.

4. ¿Para cuáles valores de $a \in \mathbb{R}$ sería $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = a \right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

¿Para cuáles valores de $a \in \mathbb{R}$ sería $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = aw \right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^4$?

5. Verdadero o falso: si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio, entonces $\{\mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U\}$ es el subespacio trivial ($\{\mathbf{0}\}$).

6-10 (OPCIÓN MÚLTIPLE) EN SIGUIENTE PÁGINA.

6. ¿Cuál de las siguientes matrices 3×3 satisface $AB = BA$ para cada 3×3 matriz B ?

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. Si $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ es una columna de la matriz A (de tamaño $m \times n$), entonces el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

- (a) siempre tiene solución.
- (b) nunca tiene solución.
- (c) a veces tiene solución (depende de A y $\mathbf{b}$).

8. Sea A una matriz de $m \times n$ y B una matriz de $n \times m$ tal que $BA = I_{n \times n}$. Entonces necesariamente

- (a) $m \leq n$, A es sobreyectiva y B es inyectiva.
- (b) $m = n$ y A, B son invertibles.
- (c) $m \geq n$, A es inyectiva y B es sobreyectiva.

9. Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

- (a) $\text{rango}(A) = n \implies A$ es invertible. Además, es posible que haya un A invertible con $\text{rango}(A) \neq n$.
- (b) A es invertible $\implies \text{rango}(A) = n$. Además, es posible que haya un A con $\text{rango}(A) = n$ que no sea invertible.
- (c) $\text{rango}(A) = n \iff A$ es invertible.

10. Sea A una matriz de $n \times n$. Supón que existe $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tal que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene *dos* soluciones linealmente independientes. Entonces:

- (a) $\text{rango}(A) \leq n$, y es posible que $\text{rango}(A) = n$.
- (b) $\text{rango}(A) \leq n - 1$, y es posible que $\text{rango}(A) = n - 1$.
- (c) $\text{rango}(A) \leq n - 2$, y es posible que $\text{rango}(A) = n - 2$.

SOLUCIONES

1. La pregunta ¿Es $\mathbf{b} \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$? es equivalente a si existe $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 = A\mathbf{x}, \quad (\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix})$$

donde A es matriz con columnas $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_4$. Es decir queremos decidir si este sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, y en caso que sí, a describir todas sus soluciones. Entonces reducimos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & | & 3 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & | & 3 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & | & -8 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & | & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2/5 & | & 8/5 \\ 0 & 1 & 1 & 1/3 & | & 4/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1/5 & | & -1/5 \\ 0 & 1 & 1 & 2/5 & | & 8/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Vemos que el sistema si es consistente con solucion general (x_3 como variable libre) $x_1 = -1 - 2x_3$, $x_2 = -x_3$, $x_4 = 4$, y concluimos que *sí*, $\mathbf{b} \in \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_4\}$ con la combinacion lineal general:

$$-(1 + 2x_3)\mathbf{a}_1 - x_3\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + 4\mathbf{a}_4 = \mathbf{b}$$

que produce $\mathbf{b}$ (para cualquier $x_3 \in \mathbb{R}$).

2. De la matriz reducida $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ anterior (reduccion de la matriz con columnas $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_4$) concluimos que:

- de columnas 1-3, vemos $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente dependientes (con relacion explicita $2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$). En particular *no son un base*.
- de columnas 1,2,4: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no hay variables libres, entonces $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ *si son un base de $\mathbb{R}^3$* .
- de columnas 2,3,4: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no hay variables libres, entonces $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ *si son un base de $\mathbb{R}^3$* .
- de columnas 2,3,4: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no hay variables libres, entonces $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ *si son un base de $\mathbb{R}^3$* .

3. Comenzamos el algoritmo reduciendo $[A \mid I]$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ya vemos que si $1 - \lambda^2 = 0$ (es decir $\lambda = \pm 1$) entonces la matriz no seria invertible (su rango 3, y su nulidad 1). Aparte, cuando $\lambda \neq \pm 1$ seguimos reduciendo:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-\lambda^2} & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-\lambda^2} & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda^3}{\lambda^2-1} & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & -\lambda & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Concluimos

- (i) La matriz es invertible si y solamente si $\lambda \neq \pm 1$. Cuando $\lambda = \pm 1$ su rango es 3 y su nulidad es 1.
- (ii) Cuando $\lambda \neq \pm 1$ su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda^2} & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & \frac{1}{1-\lambda^2} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & 1 & 0 \\ \frac{\lambda^3}{\lambda^2-1} & \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

- 4. El primer, $x + y + z = a$, define un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen (seria un subespacio) si y solamente si $a = 0$.

El segundo, $x + y + z = aw$, siempre define un subespacio en $\mathbb{R}^4$ (para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$). A saber verificamos las condiciones en la definicion del subespacio:

- si (x, y, z, w) satisface $x + y + z = aw$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces tambien $caw = a(cw) = c(x + y + z) = cx + cy + cz$ es decir que tambien (cx, cy, cz, cw) satisface la condicion. Concluimos que este subconjunto esta cerrado bajo escalamientos.
- similar si (x, y, z, w) , e, (x', y', z', w') satisfacen $x + y + z = aw, x' + y' + z' = aw'$ entonces sumando las ecuaciones tenemos $(x + x') + (y + y') + (z + z') = a(w + w')$ es decir tambien su suma $(x + x', y + y', z + z', w + w')$ satisface la condicion. Concluimos que este subconjunto esta cerrado bajo sumas.

5. Falso. Tenemos un contraejemplo con cualquier subespacio $U \subset \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{0} \neq U$ (p.ej. $U = \mathbb{R}^n$).

De hecho este conjunto es siempre U su mismo: $\{\mathbf{x} - \mathbf{y} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U\} = U$. Para demostrarlo, tenemos $\mathbf{0} \in U$ (U es un subespacio) entonces cualquier $\mathbf{u} \in U$ tambien $\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{0} \in \{\mathbf{x} - \mathbf{y} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U\}$ para la inclusion $U \subset \{\mathbf{x} - \mathbf{y} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U\}$. Para la otra inclusion, tenemos U es cerrado bajo sumas y escalamientos: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \implies -\mathbf{y} \in U$ y tambien $\mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = \mathbf{x} - \mathbf{y} \in U$, para la inclusion $\{\mathbf{x} - \mathbf{y} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U\} \subset U$.

6. (b). Explicacion: la matriz en (b) es la identidad y comuta con todo. Las otras no funcionan tampoco por las siguientes razones. Multiplicar en la izquierda con la matriz en (a) intercambia region 1 y region 3 de B , mientras multiplicar en la derecha con la matriz en (a) intercambia columna 1 y columna 3 de B . Multiplicar B en la izquierda con la matriz en (c) obtenemos una matriz con columna j con entradas igual a la suma de entradas de columna j de B , mientras multiplicar en la derecha con la matriz en (c) obtenemos una matriz con region j con entradas igual a la suma de entradas en region j de B . Entonces tenemos contra-ejemplos de (a), (c) con p.ej. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

7. (a). Explicacion: si $\mathbf{b}$ es columna j de A entonces para $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ (base estandar) tenemos $A\mathbf{e}_j = \mathbf{b}$.

8. (c). Explicacion: si $BA = I$ entonces siempre B es sobreyectiva (para cualquier $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ entonces $\mathbf{x} = A\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tiene $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$) y A es inyectiva (si $A\mathbf{y} = A\mathbf{y}'$ multiplicando los dos lados con B implica $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$). Es decir $\text{rango}(B) = n$, y $\text{nulidad}(A) = 0$. Ahora, debido a rango-nulidad tenemos: $m = \text{rango}(B) + \text{nulidad}(B) = n + \text{nulidad}(B) \geq n$.

9. (c). Explicacion: La $n \times n$ matriz A es invertible exactamente cuando su rango es n (sobreyectiva) y su nulidad es cero (inyectiva). Podemos usar rango-nulidad, $n = \text{rango}(A) + \text{nulidad}(A)$, para ver que $\text{rango}(A) = n \iff \text{rango}(A) = n$, y $\text{nulidad}(A) = 0 \iff A$ invertible.

10. (b). Explicacion: que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no admite soluciones unicas, el kernel de A no es trivial. Al menos $\text{nulidad}(A) \geq 1$, y por consecuencia al maximo $\text{rango}(A) \leq n - 1$. Estamos en opcion (b) o (c). Para decidir cual, tenemos dos soluciones independientes $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b} = A\mathbf{x}_2$ y entonces, estamos garantizada al menos un vector no trivial $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$ en el kernel, es decir $\text{nulidad}(A) = 1, \text{rango}(A) = n - 1$ (opcion (b)). Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ($\text{rango}(A) = 1 = \text{nulidad}(A)$) y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con dos soluciones ($A\mathbf{x}_j = \mathbf{b}$) independientes $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.