

# 1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

El problema central de Álgebra Lineal es **resolver** un *sistema lineal* (también “*sistema de ecuaciones lineales*”) y **dar criterios** bajo los cuales el sistema tiene ninguna solución, una única solución o varias soluciones.

Una ecuación es lineal significa que las incógnitas solamente estarán multiplicados por números y nunca con incógnitas, es decir, nunca veremos  ~~$xy$~~ ,  ~~$x^2$~~ ,  ~~$y^2$~~ ,  ~~$xy^2$~~ , etc.

## 1.1. Formas de visualizar un sistema de ecuaciones

Nuestro primer sistema lineal de ecuaciones lineales será:

$$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ 3x + 2y & = & 11 \end{array}$$

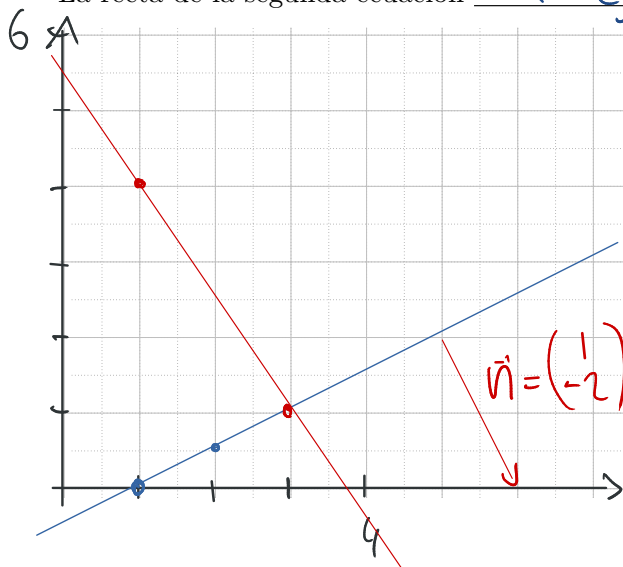
Este sistema tiene  
2 incógnitas y  
2 ecuaciones

### 1.1.1. Forma 1: Por fila / ecuación

Esta primera forma separa el sistema por filas y nos concentraremos en una ecuación (fila) a la vez. Ambas ecuaciones producen una línea (recta) en el plano  $x - y$ .

La recta de la primera ecuación  $x - 2y = 1$  pasa por los puntos:  $(1, 0), (0, -\frac{1}{2})$

La recta de la segunda ecuación  $3x + 2y = 11$  pasa por los puntos:  $(\frac{11}{3}, 0), (0, \frac{11}{2})$   
 $(1, 4), (3, 1)$



La intersección de ambas líneas es  $(3, 1)$  y ese punto es intersección de los conjuntos solución de ambas ecuaciones.

## 1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Al punto  $x=3, y=1$  se le conoce como la solución del sistema de ecuaciones y será denotado mediante un conjunto de solución:

$$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \text{tal que } x=3, y=1 \} = \{ (3,1) \}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x=3, y=1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La visualización por filas nos mostró dos líneas que se intersecan en un solo punto el cual será la solución. Cuando, las rectas son paralelas (y no iguales) no existe la intersección, y por tanto no habrá un punto que será solución.

### 1.1.2. Forma 2: Por columnas

En esta visualización usaremos **dos operaciones que serán el corazón** del Álgebra Lineal.

1. La suma de dos vectores

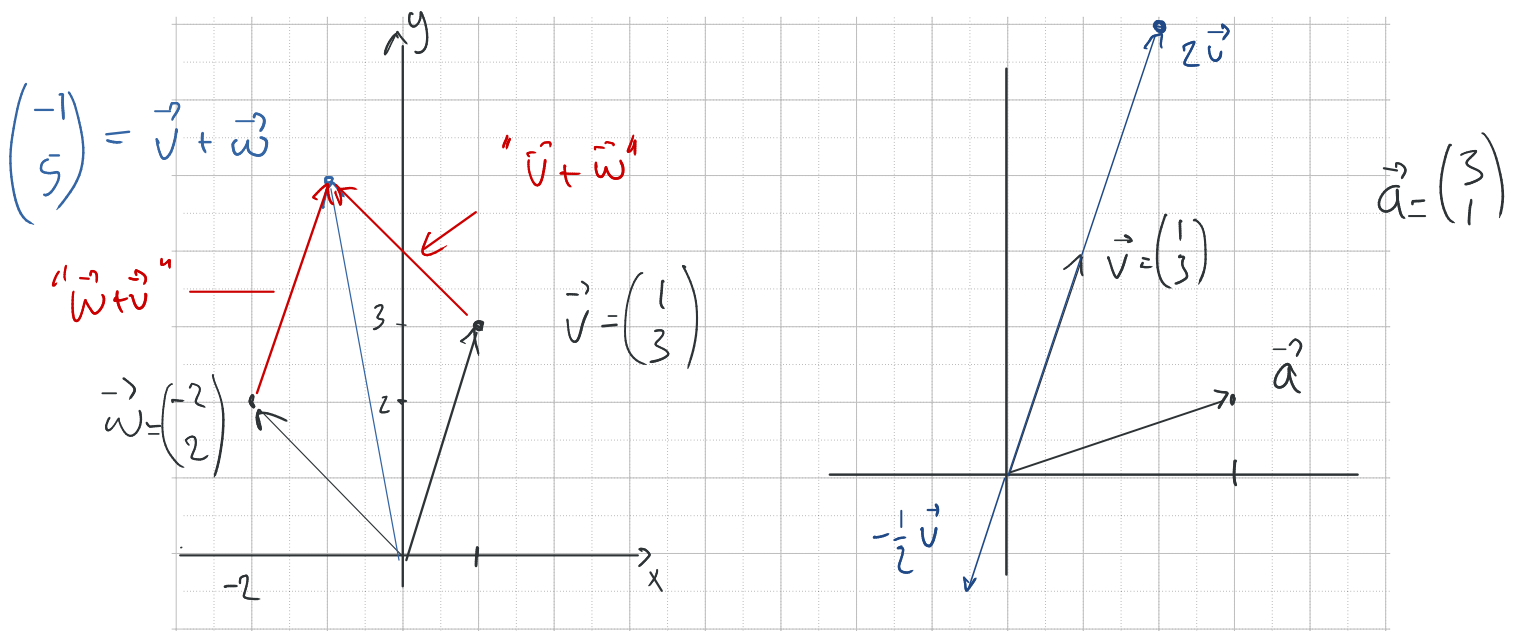
$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

2. La multiplicación de un vector por escalar

$$\gamma \vec{v} = \begin{pmatrix} \gamma v_1 \\ \gamma v_2 \end{pmatrix}$$

Para efectuar suma de vectores (de la misma longitud) la suma se aplica entrada por entrada. Similarmente, en la multiplicación “escalar (número) \* vector” cada entrada del vector se multiplica por el escalar, e.g.  $2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 * 1 \\ 2 * 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ .

Ejemplos:



 **Definición.** Cuando se combinan estas dos operaciones el resultado se conoce como una **Combinación Lineal** de los vectores involucrados.

 De hecho, cada sistema lineal representa una combinación lineal de columnas igual a una columna  $\vec{b}$  (el lado derecho).

**Ejemplo:** Si separamos el sistema 
$$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ 3x + 2y & = & 11 \end{array}$$
 en sus columnas, entonces obtenemos una combinación lineal de columnas igualada a una columna  $\vec{b}$ . Es decir:

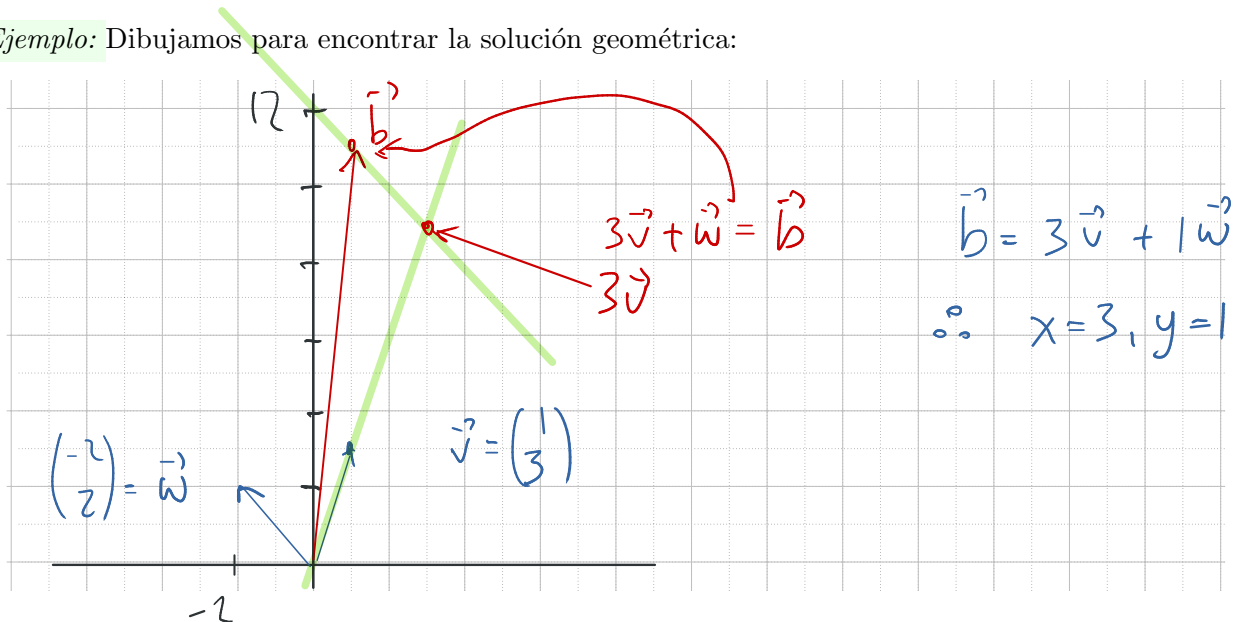
$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

dos vectores son iguales si y solo si sus entradas son iguales,

$$x \vec{v} + y \vec{w} = \vec{b}$$

El problema ahorra es encontrar valores para las incógnitas de tal manera que la combinación lineal de los vectores  $\vec{v}, \vec{w}$  sea igual al vector  $\vec{b}$ .

**Ejemplo:** Dibujamos para encontrar la solución geométrica:



 La visualización por columnas combina los vectores columna del lado izquierdo para producir al vector  $\vec{b}$  del lado derecho.

**Ejercicio:** Proporcione la solución geométrica del siguiente sistema de ecuaciones a través de las visualizaciones por filas y columnas.

$$\begin{array}{rcl} 2x - y & = & 1 \\ x + y & = & 5. \end{array}$$

### 1.1.3. Visualización en sistemas de 3 incógnitas

A continuación usaremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$2x + 5y + 2z = 4$$

$$6x - 3y + z = 2$$

$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   
forma normal  
de un plano.

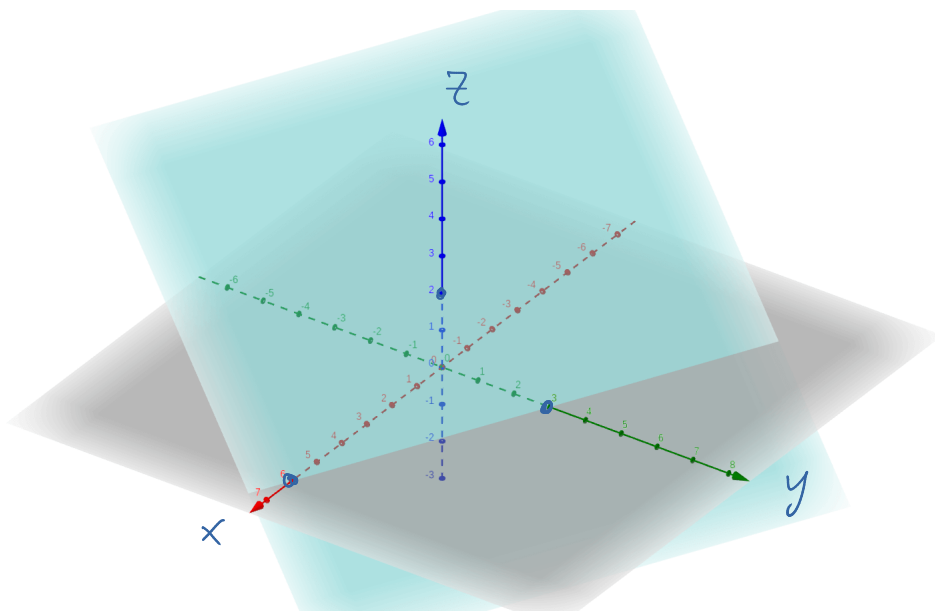
Estudiaremos este sistema por filas y columnas:

#### Empezamos por filas:

Cada fila es una ecuación que produce un plano en el espacio de 3 dimensiones ( $x - y - z$ ).

La primera fila es la ecuación

$x + 2y + 3z = 6$  la cual representa un plano que pasa los puntos:  $(6, 0, 0)$ ,  $(0, 3, 0)$ ,  $(0, 0, 2)$

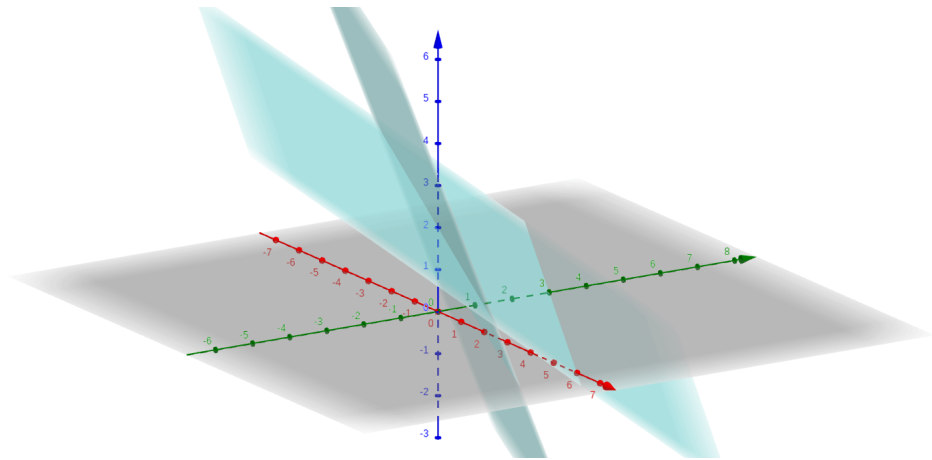


[This and the next 2 pictures were made with Geogebra]

La segunda fila es la ecuación  $2x + 5y + 2z = 4$  describe al plano que pasa por los puntos

$(2, 0, 0)$ ,  $(0, \frac{4}{5}, 0)$ ,  $(0, 0, 2)$

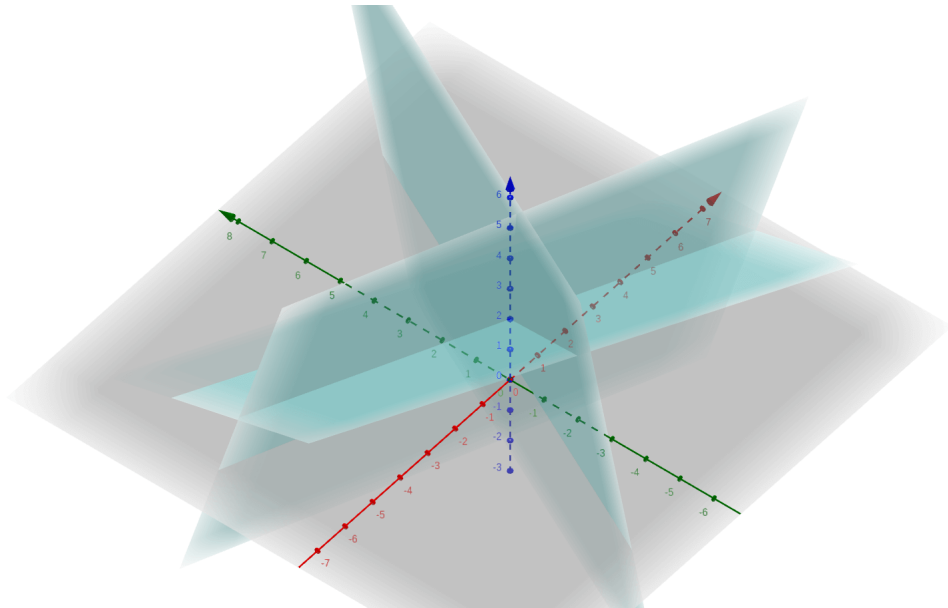
e interseca al primer plano en una línea  $L$ . El resultado usual de intersecar dos ecuaciones con 3 incógnitas es una línea  $L$ , que será el conjunto solución, siempre y cuando las 2 ecuaciones representan 2 planos en  $\mathbb{R}^3$  que no son paralelos. (“en  $\mathbb{R}^3$ ” es corto para “en dimensión 3”).



La tercera fila es la ecuación  $6x - 3y + z = 2$  describe al plano que pasa por los puntos

$$\left(\frac{1}{3}, 0, 0\right), \left(0, -\frac{2}{3}, 0\right), (0, 0, 2)$$

Este plano interseca la línea  $L$  en un solo punto



Dado que el punto  $(0, 0, 2)$  es donde se intersecan los tres planos el conjunto solución  $S$  es:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x=0, y=0, z=2 \\ \text{tal que} \end{array} \right\} = \left\{ \underline{(0, 0, 2)} \right\}$$

🍃 | En este caso la visualización por filas muestra 3 planos que se intersecan en un solo punto.

**La visualización por columnas:**

El sistema

$$x + 2y + 3z = 6$$

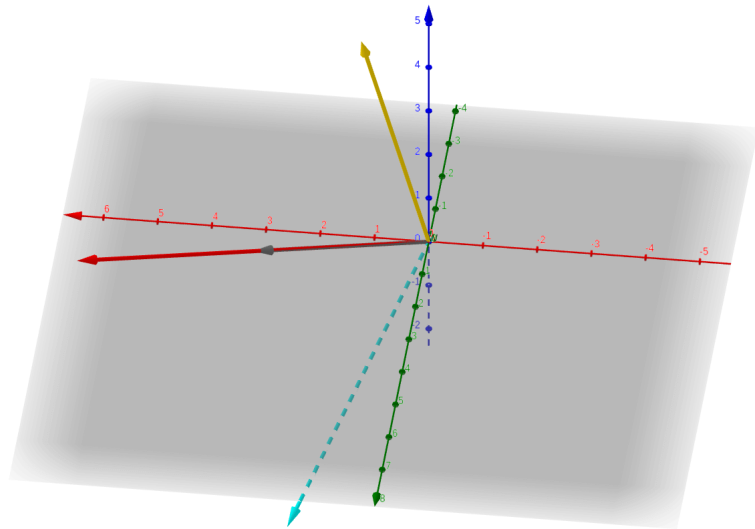
$$2x + 5y + 2z = 4$$

$$6x - 3y + z = 2$$

equivale a:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Las incógnitas  $x, y, z$  son los números (escalares) con los que multiplicaremos los tres vectores columnas con el fin de producir (llegar) a  $\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ .



*podemos usar*

De esto modo los coeficientes que se necesitan son  $x = 0, y = 0, z = 2$ . Es decir, tomamos la siguiente combinación lineal:

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{b}.$$

## 1.1.4. Casos regulares (cuando existen soluciones)

- La visualización por filas nos da la intersección de tres planos.
- En la visualización por columnas buscamos los números para formar una combinación lineal de las columnas y llegar al lado derecho  $\vec{b}$ .
- Soluciones de ecuaciones:

Puntos de intersección

son

los coeficientes en la combinación lineal de las columnas.

- El conjunto solución puede ser una recta  $L$ , por ejemplo, en el caso que tenemos 2 ecuaciones con 3 incógnitas. En este caso, se intersecan dos planos y el conjunto solución es una recta  $L$ .

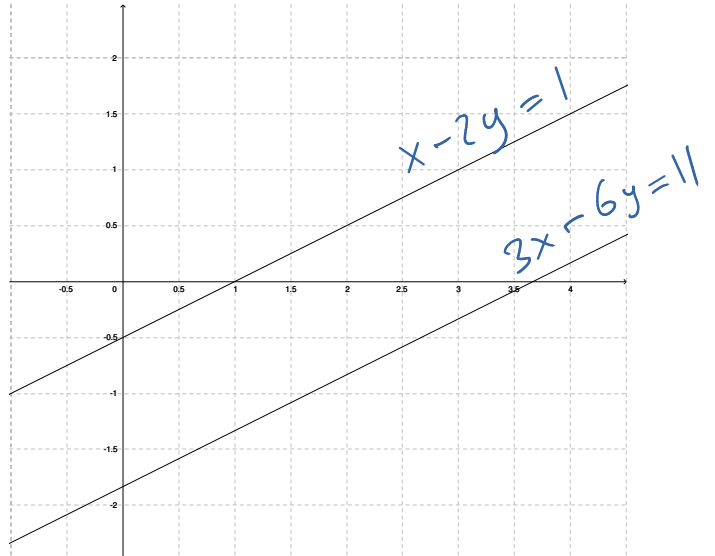
## 1.1.5. Casos singulares (cuando no existen soluciones)

En 2 dimensiones: Supongamos que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x - 2y = 1$$

$$3x - 6y = 11$$

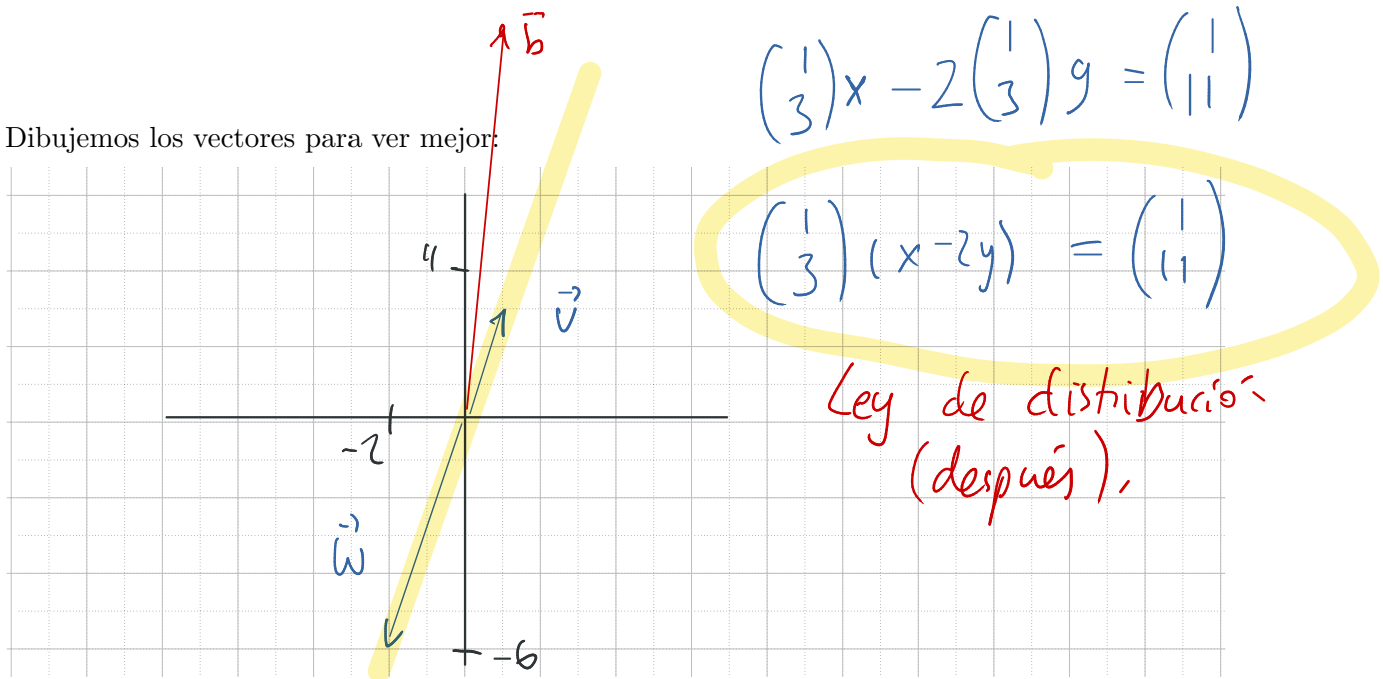
Cuando se visualiza por filas observamos que las rectas son paralelas & no se intersecan.



Cuando observamos la representación por columnas tenemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} x + \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}}_{\vec{w}} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

Dibujemos los vectores para ver mejor:



**En 3 dimensiones:** Si visualizamos el siguiente sistema veremos que dos planos son paralelos, por lo cual no se pueden intersectar y no habrá solución al sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ 4x + 2y + 2z &= 10 \\ 4x + 6z &= -2 \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Observe que en el sistema anterior las primeras 2 ecuaciones se contradicen, puesto que los coeficientes de la segunda ecuación son el doble de las coeficientes de la primera ecuación, pero en el lado derecho  $2 \cdot 3 \neq 10$ .

Para obtener algo más aterrizado hacemos los cálculos. Primero: ( $2 \cdot$  "Ecuación 1")

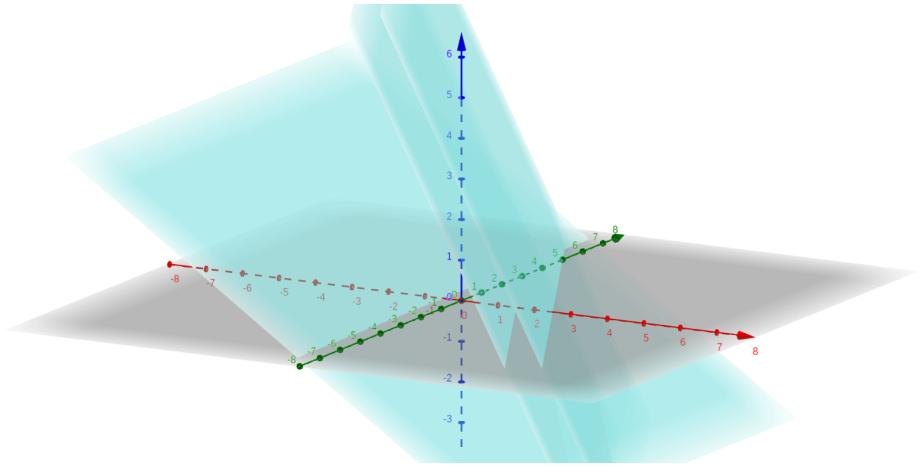
$$\begin{aligned} 2(2x + y + z) &= 2 \cdot 3 \\ \Leftrightarrow 4x + 2y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

Ahora, calculando  $2 \cdot$  "Ecuación 1" - "Ecuación 2" llegamos que  $0 = -4$ :

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 2z &= 6 \\ - (4x + 2y + 2z &= 10) \\ \hline 0 + 0 + 0 &= -4 \end{aligned} \quad ! \quad \text{⚡}$$

Si lo visualizamos por filas, entonces 2 de 3 planos son paralelos & no iguales (no se intersectan). Por lo tanto, no existe la solución (un punto en el cual se intersectan los tres planos).





🍃 | Cuando la dimensión aumenta, hay más condiciones para la existencia de soluciones:

- No existe solución cuando por lo menos 2 de 3 planos son paralelos & no iguales. Abajo veremos un ejemplo que muestra que no existe una solución para 3 planos no paralelos.  
 $\therefore$  Necesitamos la teoría que veremos más adelante.
- Por cierto: en  $\mathbb{R}^2$  (dos dimensiones) hay solo tres posibilidades:
  - a) Solución única (un punto en  $\mathbb{R}^2$ ) cuando tienes 2 líneas no paralelas.
  - b) Muchas soluciones (una recta en  $\mathbb{R}^2$ ) cuando tienes 2 líneas iguales.
  - c) El negativo: no existe solución cuando tienes 2 líneas paralelas & distintas.

**Ejemplo:** El siguiente sistema muestra que a veces se necesitan considerar todas las filas para ver que no existe la solución:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x \quad + 3z &= 5 \\ 3x + y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

Aquí del lado izquierdo (de la igualdad) la tercera fila es suma de las primeras dos. Entonces, si sumamos las primeras 2 ecuaciones y restamos la tercera da 0 del lado izquierdo.

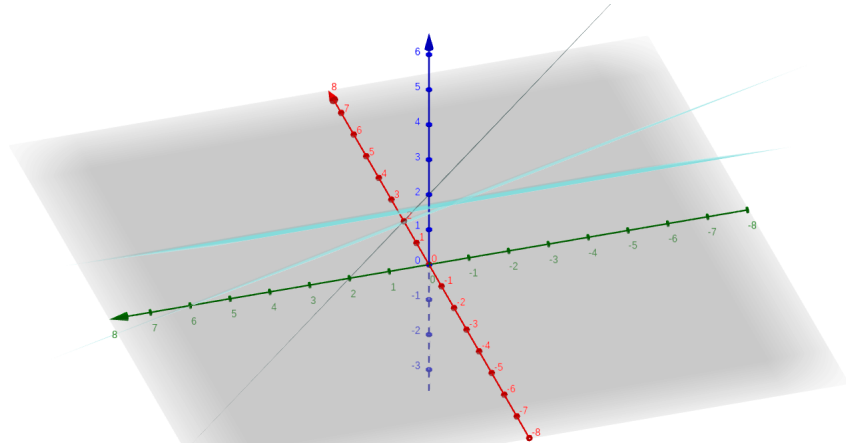
Es decir, calculando: “Ecuación 1” + “Ecuación 2” – “Ecuación 3” nos da:

$$\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ + (2x \quad + 3z = 5) \\ - (3x + y + 4z = 6) \\ \hline 0 + 0 + 0 = 1 \end{array}$$

Lo anterior contradice  $0 \neq 1$ , por lo cual se dice que el sistema es **inconsistente**.

## 1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Aquí, un dibujo (*plot*) es difícil porque solo de dos perspectivas se ve que la intersección de cada pareja de 2 planos es una línea que no se interseca con las otras. Mi mejor intento:



Desde un punto de vista de columnas no podemos encontrar una combinación lineal de las columnas (forma de combinar las columnas) y determinar los números  $x, y, z$  para obtener el vector  $\vec{b}$ .

Esto es:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{w}} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Observe que:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$