

Ejemplo: (Con una infinidad de soluciones). Del ejemplo anterior tomamos el sistema y cambiamos el lado derecho (cambiamos 6 por 7). Es decir, tenemos el siguiente nuevo sistema:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\2x + 3z &= 5 \\3x + y + 4z &= 7\end{aligned}$$

Del nuevo, calculando $\text{Fila}_1 + \text{Fila}_2 - \text{Fila}_3$ tenemos:

$$\begin{aligned}& (x + y + z = 2) + (2x + 3z = 5) - (3x + y + 4z = 7) \\ \Leftrightarrow & (3x + y + 4z = 7) - (3x + y + 4z = 7) \\ \Leftrightarrow & 0 = 0\end{aligned}$$

 Interpretación: Cada punto que satisface las primeras dos ecuaciones satisface la tercera ecuación. Por lo tanto, la intersección de los primeros dos planos (cada punto de una línea) satisface la tercera ecuación y el conjunto solución es una línea (una infinidad de puntos).

La visualización por columna es:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Usando Geogebra podemos ver que el vector $\vec{b}$ (lado derecho) ahora pertenece al plano generado por las primeras dos columnas y los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{b}$:

Plane((0,0,0), (1,2,3), (1,0,1))

u = (1,2,3)

v = (1,0,1)

w = (1,3,4)

b = (2,5,7)

1.2. Representación matricial

Por lo visto, tenemos dos formas de escribir el sistema, una por filas y otra por columnas. La existencia de soluciones depende de los coeficientes (números multiplicados con las incógnitas) y del lado derecho, pero no de la forma de escribir el sistema. Necesitamos el concepto de matrices para representar las dos formas de escribir el sistema y para estudiar existencia de soluciones.



Definición. Una **matriz (real)** de tamaño $m \times n$ tiene m filas (veintenas) & n columnas sobre $\mathbb{R}$ y es un arreglo rectangular de $m \times n$ números reales que se ve como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En corto: Muchos autores escriben $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ o $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Ejemplo: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, es decir, una matriz (real) A de tamaño 3×3 puede ser $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$



En PYTHON: Una forma de introducir matrices es definir un arreglo:

```
import numpy
A = numpy.array( [ [1,2,3], [2,5,2], [6,-3,1] ] )
```

Acceso a entradas:

- Si quiero una entrada de un arreglo (matriz), tengo que poner la matriz seguida de unas paréntesis $[]$ con el número de fila y columna. Notar que PYTHON empieza contar filas y columnas con cero, por ejemplo, $A[2,1]$ indica la entrada que esta en la tercera fila (de las filas $\{0,1,2\}$) y en la segunda columna de $\{0,1,2\}$.
- Si quiero toda la primera fila ocupo $A[0,:]$ y para la fila i ocupo $A[i,:]$ y para la columna j ocupo $A[:,j]$.

En nuestro curso para $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ usaremos la siguiente notación parecida :

$A(i,:)$ es la i -ésima fila de A p.a. $i \in \{1, 2, \dots, m\}$
 $A(:,j)$ es la j -ésima columna de A p.a. $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Ejemplo: Si $C \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ es la matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, entonces escribimos para el segundo

renglón y la cuarta columna:

$$C(2,:) = (7, 8, 3, 1) \in \mathbb{R}^{1 \times 4}, \quad C(:,4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$$

En Álgebra es **importante** notar lo siguiente:

- El renglón $C(2,:) \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ es un **vector renglón** con 4 entradas y (a la vez) **una matriz** con 1 renglón y 4 columnas.
- La columna $C(:,4) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un **vector columna** con 3 entradas y (a la vez) **una matriz** con 3 renglones y 1 columna.

1.2.1. La forma matricial de un sistema lineal

Recordamos y usamos el producto punto de “Geometría Analítica”, por ejemplo, el producto punto entre los vectores $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ es

$$(1, 2, 3) \cdot (x, y, z) = (1, 2, 3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2y + 3z \\ = \langle (1, 2, 3), (x, y, z) \rangle$$

Ejemplo: Usando la idea anterior, representamos el sistema

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$2x + 5y + 2z = 4$$

$$6x - 3y + z = 2$$

mediante un producto de una matriz por un vector igualado al vector $\vec{b}$ del lado derecho. El producto de matriz por vector viene del producto (punto) de un vector fila por el vector columna $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} (\text{fila}_1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ (\text{fila}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ (\text{fila}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ (2 \ 5 \ 2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ (6 \ -3 \ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por varias razones (“flojera”, “ahorrar papel”, ...) las operaciones anteriores se escriben utilizando la matriz, es decir, este sistema en **forma matricial** se ve como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \leftarrow A \vec{x} = \vec{b}$$

Escribimos el sistema nuevamente por columnas:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En esta página se reconocen 3 formas de escribir el mismo sistema de 3 ecuaciones lineales:

- La forma matricial $A\vec{x} = \vec{b}$ es la más usada de escribir un sistema lineal.
- La primera forma arriba (deja reconocer la forma por filas) y nos dice como calcular el producto de una matriz A con el vector $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, es decir, el producto $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que aparece en la forma matricial del sistema.
- La representación por columnas nos dice una segunda forma de calcular el producto $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, es decir, primero multiplicamos x con la primera columna de A , y con la segunda y z con la tercera y después sumamos estos vectores escalados.
- La primera forma también permite paralelizar el calculo de productos “matriz”-“vector” y así acelerar algoritmos que usan este producto.

Ejemplo*: El sistema escrito por columnas permite ver con cual vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ debes multiplicar cuando quieres extraer una columna de la matriz A . ¿Con cuál vector sacas la primera, segunda y tercera columna de A ?

$$\text{como } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{debe-}\rightarrow \text{ escoger } x=1, y=0, z=0 \text{ para obt. } A(:,1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x=0, y=1, z=0 \text{ para obt. } A(:,2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x=0, y=0, z=1 \text{ para obt. } A(:,3) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: (Producto matriz-vector).

¿Cuánto vale el vector $\vec{b}$ tal que $A\vec{x} = \vec{b}$ si la matriz A y el vector $\vec{x}$ son dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \quad ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 9 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 9 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4-1 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}}$$

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La matriz A es especial porque el producto $A\vec{x}$ nos da la diferencia de las coordenadas de $\vec{x}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 0 + 0 \\ -x + y + 0 \\ 0 - y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - x \\ z - y \end{pmatrix}$$

Además, el siguiente ejemplo muestra que un sistema con la matriz anterior es fácil de resolver.

Ejemplo: (Resolver un sistema con la matriz A del ejemplo anterior). Encuentre el vector $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que es solución de $A\vec{x} = \vec{b}$ cuando $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Sol. $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} x + 0 + 0 = 1 \\ -x + y + 0 = 5 \\ 0 - y + z = 8 \end{matrix} \quad \text{c.o. } x=1, \text{ entonces}$

$\begin{matrix} -x + y = 5 \text{ es} \\ -1 + y = 5 \Leftrightarrow y = 6 \end{matrix}$

$\& \text{ como } y=6, -y + z = 8$

se convierte en $-6 + z = 8 \Leftrightarrow z = 14$

La solución fue fácil de encontrar porque la matriz A es un tipo de matriz que llamaremos **triangular inferior** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, es decir, las entradas de A arriba de su diagonal son ceros.

Matrices especiales:

Existen matrices con características especiales.

- “Multiplicar un número con uno no cambia el número”.

Para “preservar” matrices y vectores el “UNO” es la **matriz identidad**, denotada I_n donde n indica el número de renglones y columnas y los elementos de la diagonal son 1's y fuera de ella son cero. Por ejemplo:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En PYTHON: `numpy.eye(n)` construye la matriz I_n .

El nombre “matriz identidad” es porque, el producto $I_n\vec{x}$ siempre da $\vec{x}$ y si buscamos una solución $\vec{x}$ del sistema $I_n\vec{x} = \vec{b}$ entonces esa solución será $\vec{b}$.

- Algo especial son matrices cuyas entradas son cero o el vector $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ (el origen), por ejemplo

$$O_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En PYTHON: `numpy.zeros( (3,5) )` o `numpy.zeros( (2,1) )` construyen esas matrices.

Si multiplican un vector con estas matrices, siempre les dará cero o un vector de ceros.

- La **matriz de rotación** de α grados en sentido contrario a las manecillas del reloj es:

$$R_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Ejemplo: Rotación por $\frac{\pi}{2}$ ó 90° del triángulo ABC con $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

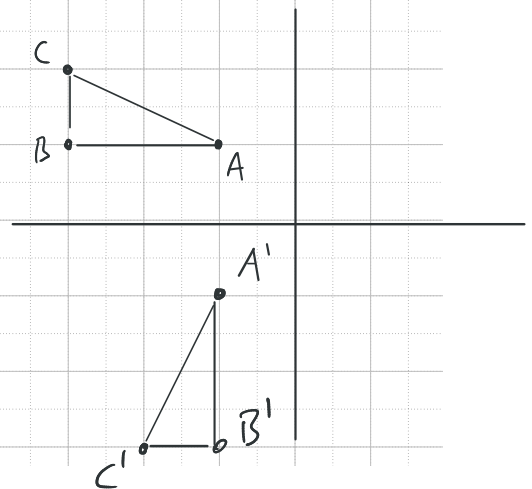
$$\alpha = 90^\circ$$

$$R_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{\alpha} A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = A'$$

$$B' = R_{\alpha} B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

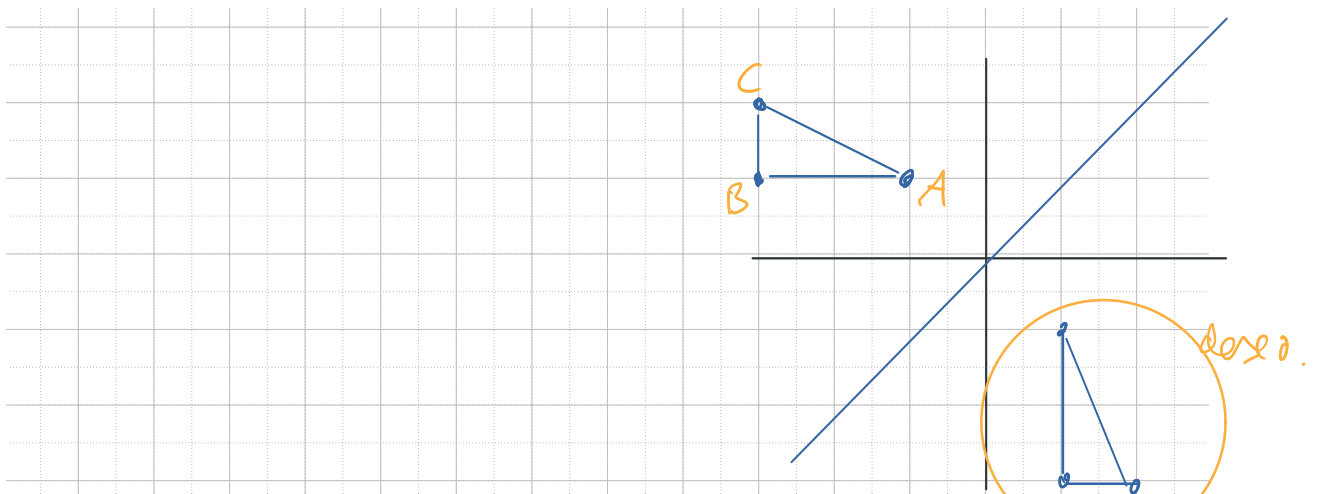
$$R_{\alpha} C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = C'$$



- La **matriz de reflexión** en la línea $y = x \tan \frac{\alpha}{2}$:

$$S_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Ejercicio: Usa la matriz de Reflexión con $\alpha = 90^\circ$ para ver que pasa con el triángulo. $\overline{ABC}$



Hasta ahora hemos visto sistemas de 2×2 & 3×3 , es decir, sistemas de 2 ecuaciones e incógnitas & 3 ecuaciones e incógnitas. A continuación veremos sistemas con m ecuaciones y n incógnitas.

1.3. Sistemas de m ecuaciones y n incógnitas

 **Definición.** Un **sistema lineal** (sistema de ecuaciones lineales) S que consta de m -ecuaciones en n -incógnitas $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ es de la forma:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j = b_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j = b_m \end{cases}$$

$\langle A_{(n \times 1)}, \vec{x} \rangle = b_1$

donde a_{ij} con $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$ son los coeficientes reales conocidos (en general son elementos del campo), $b_1, \dots, b_m$ son también números reales conocidos (o elementos del campo) & se encuentran del lado derecho de la igualdad.

Si $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, entonces el sistema lineal se llamará **homogéneo**.

En otro caso el sistema es **no-homogéneo**.

Una tupla o vector $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ será **solución** de S , cuando se sustituyen los números de la tupla en cada una de las ecuaciones del sistema S & todas ellas se satisfacen.

Denotaremos por $\mathcal{L}_S$ al **conjunto de todas las soluciones** de S .

 La definición anterior nos dice una forma de calcular el producto $A\vec{x}$ cuando la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y el vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ son conocidos.

 **Definición** ("corta"). Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz conocida (con m renglones y n columnas), $\vec{b} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\vec{0}\}$ un vector conocido (el lado derecho con m renglones) y $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector (columna cuyas entradas son las incógnitas). Entonces, $A\vec{x} = \vec{0}$ es un sistema lineal homogéneo y $A\vec{x} = \vec{b}$ un sistema lineal no-homogéneo.

Ejemplos: (Casos especiales)

$$\begin{aligned} m=1, n=2 & \quad \therefore \text{recta en } \mathbb{R}^2 \\ m=1, n=3 & \quad \therefore \text{plano en } \mathbb{R}^3 \\ m=2, n=2 & \quad \therefore \text{dos rectas en } \mathbb{R}^2 \text{ que se intersectan (ó no)} \\ \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ \quad 2 \text{ ec.} \quad \quad n \text{ inc.} \\ m=2, n=3 & \quad \therefore \text{2 planos en } \mathbb{R}^3 \text{ que se intersectan (en } \mathbb{R}^3 \text{ ó no)} \end{aligned}$$

1.3.1. Sistemas equivalentes



Definición. Se dice que dos sistemas S & S' son **equivalentes** denotado $S \sim S'$ si tienen el mismo conjunto solución. Esto es, cada solución del sistema S es solución de S' y al revés.

Ejemplos:

a) Intercambio de ecuaciones no cambia soluciones:

$$S = \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{Intercambio}} \quad S' = \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

b) Multiplicar una ecuación por una constante **distinta de cero** no cambia. Las siguientes sistemas son equivalentes, ya que ambos tienen la única solución $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$:

$$S = \begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \quad S' = \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_2 = 9 \end{cases}$$

c) Los siguientes sistemas son equivalentes, ya que la única solución es $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ tanto para S como para S' .

$$S = \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases} \quad S' = \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Note que tanto S como S' tienen la misma primera ecuación y que

“segunda ecuación de S' ” = “segunda ec. de S ” – “2 veces la primera ec. de S ”.

En los tres ejemplos anteriores hemos obtenido sistemas equivalentes, usando operaciones que nos llevan del primer sistema al segundo sistema. A estas operaciones se les conoce como operaciones elementales & las definiremos formalmente.

1.3.2. Operaciones elementales



Definición. Se llaman **Operaciones Elementales** de ecuaciones o filas a las siguientes tres operaciones:

- (I) Intercambiar (permutar) dos ecuaciones (filas).
- (II) Multiplicar una ecuación por un número **diferente de cero**.
- (III) Sumar un múltiplo de una ecuación a **otra** ecuación.

1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

A continuación presentamos unos de los teoremas mas importantes dentro del Álgebra Lineal que nos permitirá llevar un sistema lineal S a un sistema equivalente a través de operaciones elementales.

Teorema 1.1. Si S es un sistema y se realiza una operación elemental para obtener un sistema S' , entonces ambos sistemas son equivalentes.

Demostración. Sea $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ una tupla que es solución del sistema S . Se tienen que considerar tres casos. Solamente efectuamos uno de ellos, ya que es el que mejor ejemplifica la demostración.

Caso (II), la segunda operación elemental.

Consideremos un número $i \in \{1, \dots, m\}$ fijo. Además, consideremos la i -ésima ecuación del sistema S , es decir, consideremos

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i.$$

Si multiplicamos la ecuación anterior por un número $t \neq 0$ se obtiene la ecuación i del segundo sistema S' , esto es:

$$t a_{i1}x_1 + t a_{i2}x_2 + \dots + t a_{in}x_n = t b_i.$$

Como $\vec{u}$ es solución de S , entonces se tiene que $\vec{u}$ satisface:

$$t a_{i1}u_1 + t a_{i2}u_2 + \dots + t a_{in}u_n = t(a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n) = t b_i.$$

Concluimos que $\vec{u}$ también es solución de S' .

De forma similar se demuestra el caso (III) y el caso (I) se considera fácil. □

2

Dada un sistema lineal S , el teorema anterior permite generar una sucesión de sistemas lineales donde el último sistema es muy fácil de resolver. Las operaciones elementales se usan en algoritmos “Eliminación Gaussiana”, “método de Gauss-Jordan” y en futuras materias.

Ejemplo*: Aplique el teorema 1.1 al siguiente sistema para obtener sistemas equivalentes y determine el conjunto solución.

Solución: Denotaremos por $R_1 :=$ renglón 1, $R_2 :=$ renglón 2 & $R_3 :=$ renglón 3. Sea S el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S = \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

izquierda:

Sistemas equivalentes <

derecha:

> lo que realmente cambia

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -8 & 5 \end{array} \right)$$