

$$R_2^N = R_2 - R_1$$

$$R_3^N = R_3 - R_1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 0 - 4x_2 + 5x_3 = -2 \\ 0 + 4x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \end{array} \right)$$

$$R_3^N = R_3 + R_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 0 - 4x_2 + 5x_3 = -2 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_2^N = \frac{R_2}{-4}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_2 - \frac{5}{4}x_3 = +\frac{1}{2} \\ 0 = 0 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -5/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

" $S^{(5)}$ "

5 ops. elementales



Del lado derecho vimos para cada sistema equivalente una forma corta ["matriz" | "lado derecho"] de representarlo. Esta forma $[A | \vec{b}]$ será más tarde la **matriz aumentada** del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Observe que S' tiene 2 ecuaciones y 3 incógnitas, es decir, el conjunto solución del sistema S es igual a la intersección de estos dos planos (una recta en el espacio). En otras palabras se dice que tenemos una $(1 = 3 - 2)$ **variable libre**:

$$S' = \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_2 - \frac{5}{4}x_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \iff S' = \begin{cases} x_1 = 3 - x_2 + 3x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}x_3 \end{cases}$$

var. libre.

↑
variables dependientes

Si consideramos a la variable libre x_3 igual a un parámetro $t \in \mathbb{R}$, entonces sustituciones hacia atrás permiten despejar las otras variables en función de t :

$$x_3 = t$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}t$$

$$x_1 = 3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4}t\right) + 3t = \frac{5}{2} + \frac{7}{4}t$$

El conjunto solución es:

$$L_S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 + 7/4 t \\ 1/2 + 5/4 t \\ 0 + t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7/4 \\ 5/4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

que es la recta que pasa por el punto

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ \& lleva la dirección } \vec{v} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 5/4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

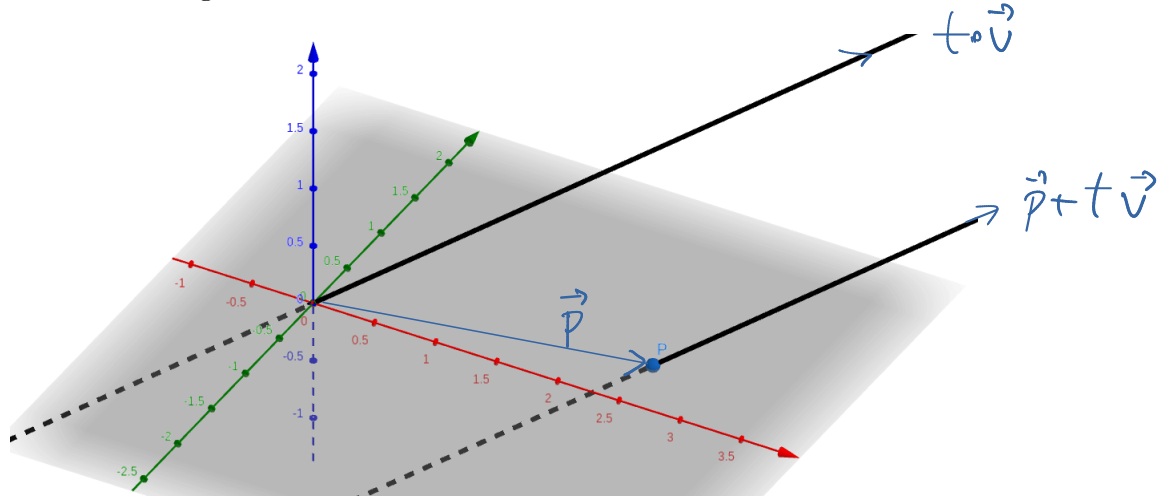
Nuestro conjunto solución del problema anterior es el siguiente:

$$\mathcal{L}_s = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{p}} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 7/4 \\ 5/4 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}} : t \in \mathbb{R} \right\} = \{ \vec{p} + t\vec{v} : t \in \mathbb{R} \}.$$

Ejercicio: Verifique que $A\vec{p} = \vec{b}$ y $A\vec{v} = \vec{0}$ donde $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz original del ejemplo.



Concepto general: El vector $\vec{p}$ es una **solución particular** de $A\vec{x} = \vec{b}$ y el vector $\vec{v}$ es una solución del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$.



Aplicación de programación lineal: El siguiente problema de minimización equivale a minimizar una función en una variable:

$$\text{minimizar } x_1 - x_2 - x_3$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 5 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \& \quad 0 \leq x_3 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

Las soluciones del sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ pertenecen al conjunto

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}_s = \left\{ \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7/4 \\ 5/4 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \{ \vec{p} + t\vec{v} : t \in \mathbb{R} \}.$$

Además, las desigualdades $0 \leq x_3 \leq 4$ limitan la variable t al intervalo $[0, 4]$. Junto, la estructura de la solución y la restricción $t \in [0, 4]$ nos permiten escribir el problema de la siguiente forma:

$$\min_{t \in [0, 4]} \left(\frac{5}{2} + t\frac{7}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} + t\frac{5}{4} \right) - t.$$

$$= 2 + t \left(\frac{7}{4} - \frac{5}{4} - 1 \right) = 2 - \frac{1}{2}t$$



Definición. Para cada sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ la matriz $[A|\vec{b}]$ se llama **matriz aumentada**.

Ejemplo: (Sistema inconsistente). Sea S el siguiente sistema lineal, sobre el cual efectuaremos operaciones elementales (página 19). El objetivo es llevar el sistema a uno con matriz triangular:

$$S = \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases} \quad (\Rightarrow) (A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -5 & 7 & 3 \end{array} \right)$$

(o.e.1)

$R_3 \leftrightarrow R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

(o.e.3)

$R_2^N = R_2 + (-2)R_1$

$R_3^N = R_3 - 3R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 11 & -16 & -8 \\ 0 & 11 & -16 & -9 \end{array} \right)$$

$R_3^N = R_3 - R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 11 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$0 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$$

∴ El sistema es inconsistente ($0 \neq -1$) & el conjunto solución es vacío $\emptyset$.



Para efectuar la 3ª operación elemental es conveniente que en una fila (alguna ecuación) el primer coeficiente distinto de cero es 1. Así se pueden evitar algunas fracciones (como apenas se hizo).



Definición. Un sistema lineal es **consistente** si y solo si (syss) tiene al menos una solución. Si el conjunto solución es vacío, entonces diremos que el sistema es **inconsistente**.

1.4. Eliminación Gaussiana y el método de Gauss-Jordan

Hemos visto como transformar el sistema lineal original a un sistema equivalente con operaciones elementales. Vimos que esas operaciones se pueden efectuar en algún orden flexible (depende de la persona). Una persona (también un algoritmo) debe tener un objetivo “en mente”, e.g. un sistema estándar (fácil de resolver) al que quiere llegar.

Esa forma estándar se conoce como **forma escalonada (reducida)** y la definimos en seguida.



Definición 1.1. Una matriz está en **forma escalonada (FE)** syss se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. Si la matriz tiene renglones que consisten únicamente de ceros, esos renglones están en su parte inferior.
2. Si un renglón tiene coeficientes distintos de cero, entonces el primer (de izquierda a derecha) de esos coeficientes distintos de cero es igual a uno. Ese uno es llamado un **uno principal**.
3. Cada uno principal aparece a la derecha y por debajo de los unos principales de los renglones precedentes (por arriba).

Una matriz está en **forma escalonada reducida (FER)** si esta en FE y además satisface:

4. Cada uno principal es el único elemento diferente de cero dentro de la columna en la cual se encuentra.

Ejemplos:

Handwritten examples of matrices illustrating the conditions for row echelon form (FE) and reduced row echelon form (FER):

- Matrix 1 (FE):** $\begin{pmatrix} 1 & 5/2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Labeled **FE** with a checkmark.
- Matrix 2 (FE):** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \times & \times \\ 0 & 1 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Labeled **FE**.
- Matrix 3 (not FE):** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Labeled **no FE (no cumple 2)**.
- Matrix 4 (not FE):** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Labeled **no FE (no cumple 1)**.
- Matrix 5 (FER):** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \pi & 0 & 0 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}$. Labeled **FER**.

La tercera condición de la definición 1.1 implica que si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ está en forma escalonada, entonces su número de unos principales es menor o igual al mínimo entre m y n .

Definición. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz. Se dice que $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una **forma escalonada de A** si B está en FE y B se obtiene aplicando operaciones elementales empezando con A .

Se dice que $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la **forma escalonada reducida de A** si B está en FER y B se obtiene aplicando operaciones elementales empezando con A .

Con ejemplos se puede ver que una matriz puede tener varias FE. Por otro lado, se necesita demostrar que cualquier matriz tiene una y solo una FER, ver por ejemplo el Teorema 2.28 en el libro de Mota & Rumbos 2020.

Definición. Eliminación Gaussiana toma una matriz aumentada $[A|\vec{b}]$ de un sistema lineal y efectúa operaciones elementales (pág. 19) hasta llegar a una forma escalonada (definición 1.1).

El **método de Gauss-Jordan** continua este proceso (efectuando más operaciones elementales) para llegar a su forma escalonada reducida.

Ejemplo: (FE y FER con infinidad de soluciones). Usando operaciones elementales convierte la matriz aumentada del siguiente sistema (a) en FE y (b) en FER. De ambas formas determine su conjunto solución.

$$S = \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -6 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -8 & 5 \end{array} \right)$$

o.e. 1 $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & 6 \\ 1 & 5 & -8 & 5 \end{array} \right)$$

o.e. 3

$$R_2^N = R_2 - 2R_1$$

$$R_3^N = R_3 - R_1$$

$$R_3^N = R_3 - R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & -10 & 4 \\ 0 & 8 & -10 & 4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & -10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_2^N = R_2/8 \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

FF.

trabajo

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_2 - \frac{5}{4}x_3 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_3 = t}, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}t, \quad x_1 = 1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 + 3\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4}t\right) - 2t = \underline{\underline{\frac{5}{2} + t\frac{7}{4}}}$$

continuamos a la FER.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5/4 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$R_1^N = R_1 + 3R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/4 & 5/2 \\ 0 & 1 & -5/4 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$1 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 - \frac{7}{4}x_3 &= \frac{5}{2} \\ x_2 - \frac{5}{4}x_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{2} + \frac{7}{4}x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{2} + \frac{5}{4}x_3 \end{aligned}$$



Definición. Piensa en una FE de una matriz. Si x_i es multiplicada con un UNO principal, entonces le decimos **variable básica** (ó dependiente). En otro caso, le decimos **variable libre**.

La FER anterior indica que $\{x_1, x_2\}$ son variables básicas y x_3 es variable libre.

1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplo: Encuentre la solución general del sistema lineal cuya matriz aumentada se ha reducido a:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right]$$

Observe que solo falta un 1 principal y un cambio de renglones para estar en FE.

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

$R_2/2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \leftarrow \text{FE}$$

$R_1^N = R_1 + 2R_2$

$R_2^N = R_2 + \frac{1}{2}R_3$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & -4+2 \cdot 7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

$R_1^N = R_1 - 6R_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 - 4x_4 = 5 \\ x_5 = 7 \end{array}$$

Las columnas principales (que tienen un uno) son $\{1, 3, 5\}$
 $\therefore x_1, x_3, x_5$ son básicas y x_2 y x_4 son libres

El conjunto solución es:

$$L_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \\ 5 + 4x_4 \\ x_4 \\ 7 \end{pmatrix} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1.4.1. Los pasos del método de Gauss-Jordan.

Hago un intento de describir lo que son los pasos. Unos pasos parecidos se encuentran en las paginas 24-25 del libro de Mota & Rumbos (2020).

- *Paso 0:* Definir la matriz aumentada del sistema lineal y el renglón actual ($r = 1$). (A|b)

- *Paso 1:* Localizar la primera columna (de izquierda a derecha) con entradas diferentes de cero en renglones $i \geq r$ (es decir, en renglón r o por debajo de él) y elegir alguna entrada distinta de cero en esa columna. Supongamos que dicha entrada está en el i -ésimo renglón.

Si no existe una entrada diferente de cero, entonces el algoritmo termina aquí.

- *Paso 2:* Cambiar renglón i con el renglón actual r . Después, la columna actual (fijada en paso 1) tendrá una entrada diferente de 0 en el renglón r . |o.e.

- *Paso 3:* Generar un 1 principal en el renglón actual r , es decir, usar la 2ª operación elemental para dividir ese renglón entre su primer elemento diferente de cero (debido al paso 2). 2 oe.

- *Paso 4:* (Solo si $r < m$, es decir, r no es el último renglón.) Aplicar la 3ª operación elemental (pág. 19) para eliminar entradas diferentes de cero en la columna actual (fijado en paso 1) y por debajo del 1 principal del renglón actual r (generado en paso 3). 3 oe.

- *Paso 5:* Si $r < m$, aumentar " $r \mapsto r + 1$ " para usar el siguiente renglón como el actual y repetir los pasos 1 a 4. La siguiente "columna actual" estará a la derecha de esta.

Cuando $r = m$ hemos llegado a una FE de la matriz inicial.

- *Paso 6:* Usar la 3ª operación elemental (pág. 19) para eliminar entradas diferente de ceros en los renglones arriba de los unos principales. ↑

Con este paso, llegaremos a la FER de la matriz inicial.

Gauss-Jordan.
Eliminación Gaussiana

1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplo: (del Libro Mota & Rumbos) Considere el siguiente sistema y determine cuales condiciones deben cumplir a, b, c para que el sistema sea consistente:

$$3x - y = a$$

$$x - y = b$$

$$2x + y = c$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 2 & 1 & c \end{array} \right)$$

← Paso 0.

← $R_2 \leftrightarrow R_1$ (Paso 2)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b \\ 3 & -1 & a \\ 2 & 1 & c \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Paso 4}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b \\ 0 & 2 & a-3b \\ 0 & 3 & c-2b \end{array} \right)$$

$R_2^N = R_2 - 3R_1$
 $R_3^N = R_3 - 2R_1$

Paso 3

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & \frac{a-3b}{2} \\ 0 & 3 & c-2b \end{array} \right) \xrightarrow{R_3^N = R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & \frac{a-3b}{2} \\ 0 & 0 & c-2b-\frac{3}{2}a+\frac{9}{2}b \end{array} \right)$$

Para que sea consistente ($L_s \neq \emptyset$) se requiere que

$$c - 2b - \frac{3}{2}a + \frac{9}{2}b = 0$$

$$\Leftrightarrow 2c - 4b - 3a + 9b = 0$$

$$\Leftrightarrow 2c + 5b - 3a = 0$$

Respuesta: si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : -3a + 5b + 2c = 0 \right\}$

entonces el sistema es consistente (tiene sol.)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$