

1.4.2. Resumen

Después de aplicar sucesivamente las **tres** operaciones elementales (página 19) al sistema:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad A \vec{x} = \vec{b}$$

se obtiene un sistema S' que esta en forma escalonada (FE) con $r \leq \min\{m, n\}$ unos principales. Para simplificar la discusión de los hechos relevantes supongamos que los unos principales se ubican en las primeras r columnas de S' :

$$(S') \left\{ \begin{array}{l} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1r}x_r + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2r}x_r + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{rr}x_r + \dots + a'_{rn}x_n = b'_r \\ 0 = b'_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b'_m \end{array} \right.$$

donde $a'_{11} = a'_{22} = \dots = a'_{rr} = 1$ (por estar en FE).

Todas las (posibles) formas escalonadas de una matriz comparten las siguientes características:

1. Cada FE es el resultado de aplicar eliminación Gaussiana (las **tres** operaciones elementales, pág. 19) y tiene el mismo conjunto solución que el sistema original (por teorema 1.1).
2. El número $r \leq \min\{m, n\}$ de unos principales es igual al de la FER del sistema, ya que la FER se obtiene eliminando coeficientes arriba de los unos principales por medio de la tercera operaciones elemental (pág. 19), es decir, haciendo el último paso del método de Gauss-Jordan (pág. 29).

Conceptos prevalentes:



Definición. Para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, es decir, con m renglones y n columnas, el número r de unos principales en una FE(R) de A se llama **rango de A** y siempre satisface $r \leq \min\{m, n\}$.



En este curso: Las incógnitas que se multiplican con (las columnas que contienen) los unos principales de la FER serán **variables básicas** (variables dependientes) y las $(n - r)$ variables restantes serán **variables libres**.

Caracterización de sistemas y sus conjuntos de solución:

	$r = m$	$r < m$ $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$	$r < m$ $\exists b'_i \neq 0$ p.a. $i > r$
$r = n$	solución única	solución única	$\mathcal{L}_s = \emptyset$
$r < n$	varias soluciones y ($n - r$) variables libres	varias soluciones y ($n - r$) variables libres	$\mathcal{L}_s = \emptyset$

Ejemplos vistos: Con solución única (en páginas 1–6), sin solución (en páginas 7–10 y 24) y con muchas soluciones ($r < n$ en páginas 11, 20–23, 26–27).

Ejemplos vistos con algunos detalles:

Página	m	n	r	variables libres	$\mathcal{L}_s$
20–21	3	3	2	x_3	recta (no vacío)
24	3	3	2	x_3	$\emptyset$
25 (la FER)	4	8	4	x_1, x_3, x_6, x_8	(no es sistema)
26–27	3	3	2	x_3	recta
28	3	5	3	x_2, x_4	plano
30	3	2	2	$\emptyset$	punto o $\emptyset$

Consecuencias de operaciones elementales para **sistemas homogéneos**:

- Si un sistema es homogéneo, entonces cualquier sistema equivalente será homogéneo.
- Un sistema homogéneo siempre tiene por lo menos una solución, la **solución trivial** que es el vector de ceros $\vec{0}$.
- Si el sistema homogéneo satisface $r < n$, es decir, si en la FER hay menos ecuaciones que incógnitas, entonces el sistema también tiene soluciones no-triviales.

Ejercicio: Resolviendo el siguiente sistema te darás cuenta que los tres puntos son ciertos:

$$\begin{aligned} w + x + y + z &= 0 \\ w + x &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

La solución es: $\mathcal{L}_s = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4$

Ejemplo: Encontrar los valores de b que hacen que el siguiente sistema (dado en forma de su matriz aumentada) tenga solución, infinitas soluciones & ninguna solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -2 & 2 \\ -1 & (b-2) & 2 & -2 \\ 2 & 2 & (b-4) & 3 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_2^N = R_2 + R_1 \\ R_3^N = R_3 - 2R_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -2 & 2 \\ 0 & 2b-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2b & b & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3^N = R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -2 & 2 \\ 0 & 2b-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -1 \end{array} \right)$$

Caso 1: $b=0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \therefore$ inconsistente, ya que $0 \neq -1$
 $r=2$, $b_3 \neq 0$, $\mathcal{L}_S = \emptyset$

Caso 2: $2b-2=0 \Leftrightarrow b=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

rango $r=2$, $n=3$, x_2 libre, $\mathcal{L}_S = \text{vect.}$

Caso 3: $\neg (b=0 \vee b=1) \Leftrightarrow b \neq 1 \vee b \neq 0$,
 $(2b-2 \neq 0 \vee b \neq 0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -2 & 2 \\ 0 & (2b-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -1 \end{array} \right)$$

$$\downarrow R_2^N = \frac{R_1}{2b-2} \quad (2b-2 \neq 0)$$

$$R_3^N = R_3/b \quad (b \neq 0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/b \end{array} \right) \quad \therefore$$

$$R_1^N = R_1 + 2R_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 0 & 2 - \frac{2}{b} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/b \end{array} \right)$$

$$R_1^N = R_1 - bR_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 - \frac{3}{b} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/b \end{array} \right), \quad r=3 \text{ (unos princ.)}$$

$n=3, m=3$

La solución es un punto

$$\angle_S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{3}{b} \\ 0 \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \right\}$$

1.5. Combinaciones lineales y sistemas homogéneos

Los sistemas homogéneos y sus soluciones aparecerán con frecuencia en futuras materias y en esta materia para definir nuevos conceptos (más tarde). Para verificar conceptos tendrás que saber resolverlos. La siguiente propiedad es linda, permitirá demostrar resultados y puede simplificar la definición de conjuntos solución de sistemas homogéneos.

Lema 1.2. Sea S_H un sistema homogéneo con n incógnitas. El conjunto de soluciones de S_H satisface la **propiedad de cerradura** "bajo combinaciones lineales". Es decir, si conocemos dos vectores (n -tuplas) $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ que son soluciones del mismo sistema homogéneo S_H , entonces las combinaciones lineales $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ también serán soluciones de S_H .

Demostración. Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ dos vectores (con n entradas) que son soluciones del sistema S_H . Entonces se satisface que:

$$\begin{array}{c|c} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n = 0 & a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n = 0 \\ \hline a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n = 0 & a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n = 0 \\ \hline a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n = 0 & \end{array}$$

Por demostrar: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ pertenece al conjunto de soluciones de S_H para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Recordamos que:

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n + \beta v_n \end{pmatrix}$$

Sustituyamos cada una de las entradas del vector anterior en el lado izquierdo del sistema S_H . Para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ queremos que la i -ésima fila de lado izquierdo se hace cero:

$$\begin{aligned} & a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \dots + a_{in}w_n \\ \stackrel{\text{def. } \vec{w}}{=} & a_{i1}(\alpha u_1 + \beta v_1) + a_{i2}(\alpha u_2 + \beta v_2) + \dots + a_{in}(\alpha u_n + \beta v_n) \\ \stackrel{\text{ley distr. en } \mathbb{R}}{=} & a_{i1}\alpha u_1 + a_{i1}\beta v_1 + a_{i2}\alpha u_2 + a_{i2}\beta v_2 + \dots + a_{in}\alpha u_n + a_{in}\beta v_n \\ \stackrel{\text{suma en } \mathbb{R} \text{ conmutativa}}{=} & \alpha a_{i1}u_1 + \alpha a_{i2}u_2 + \dots + \alpha a_{in}u_n + \beta a_{i1}v_1 + \dots + \beta a_{in}v_n \end{aligned}$$

+ asociativa

$$\text{en } \mathbb{R} = (a_{i1} \alpha u_1 + \dots + a_{in} \alpha u_n) + (a_{i1} \beta u_1 + \dots + a_{in} \beta u_n)$$

ley distrib.

$$\text{en } \mathbb{R} = \alpha (a_{i1} u_1 + \dots + a_{in} u_n) + \beta (a_{i1} u_1 + \dots + a_{in} u_n)$$

$$= \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

u_1, u_n son soluciones

Para cada fila $i \in \{1, \dots, m\}$ hemos demostrado: $a_{i1} w_1 + a_{i2} w_2 + \dots + a_{in} w_n = 0$, lo cual equivale a $A\vec{w} = \vec{0}$. Por lo tanto, la combinación lineal $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ es solución de S_H para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\square$

Nota: Los argumentos de esta demostración también sirven para demostrar $A(\alpha\vec{u}) = \alpha(A\vec{u})$, “podemos sacar factores escalares $\alpha \in \mathbb{R}$ ” y $A(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha A\vec{u} + \beta A\vec{v}$, “una ley distributiva”.

Definición. Dados n escalares $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ y los siguientes n -vectores de m -entradas cada uno

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \quad \vec{v}_n = \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{mn} \end{pmatrix}$$

definimos la **combinación lineal** de ellos como $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n$, es decir

$$x_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 v_{11} + x_2 v_{12} + \dots + x_n v_{1n} \\ x_1 v_{21} + x_2 v_{22} + \dots + x_n v_{2n} \\ \vdots \\ x_1 v_{m1} + x_2 v_{m2} + \dots + x_n v_{mn} \end{pmatrix}$$

una combi. lineal
es un producto
matriz $\times$ vector,

$$= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En términos generales una combinación lineal de vectores es la suma de los vectores una vez multiplicados por los escalares.

Ejemplo: Escribe el lado izquierdo del siguiente sistema homogéneo (a) como combinación lineal de vectores, (b) como producto matrix-vector. Después, resuelve el sistema:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$a) \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_2' = R_2 + R_1 \downarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_1' = R_1 - 2R_2 \downarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

rango $r=2$, columnas $n=4$, $n-r=4-2$ libres

El conjunto solución es: tomar $x_3=t$, $x_4=s$

$$\mathcal{L}_S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 3s \\ -2t + 2s \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A\vec{u} = \vec{0} \text{ y } A\vec{v} = \vec{0}.$$

Ese conjunto solución ejemplifica lema 1.2.

1.6. Aplicaciones de sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección presentaremos problemas que pueden ser modelados mediante sistemas de ecuaciones lineales. A continuación presento un ejercicio de las tareas.

Ejercicio: La Combustión del amoníaco (NH_3) en oxígeno (O_2) produce nitrógeno (N_2) y agua (H_2O). Encuentre una ecuación química balanceada de esta reacción. Es decir, encuentre cuantas moléculas de amoníaco y oxígeno son necesarias para producir nitrógeno y agua recordando que los átomos no se pierden al balancear la ecuación.



Sean w := el # de moléculas de (NH_3)

x := el " " " " (O_2)

y := el " " " " (N_2)

Se pide que NO se pierdan átomos (en la comb.):

$$w \overset{N}{=} 2y, \quad 3w \overset{H}{=} 2z, \quad 2x \overset{O}{=} z$$

Reescribir las 3 ec. como un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} w - 2y = 0 \\ 3w - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{array} \right\} \text{matriz} \begin{array}{c} \text{aun.} \end{array} \begin{pmatrix} w & x & y & z \\ 1 & 0 & -2 & 0 & | & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2^N = R_2 - 3R_1 \\ R_3^N = R_3/2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2^N = R_2/6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_1^N = R_1 + 2R_3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \end{array} \right) \quad \underline{\underline{z}}$$

$$w = \frac{2}{3} z$$

$$x = \frac{1}{2} z$$

$$y = \frac{1}{3} z$$

Tomamos z como var. libre, ya que no tiene un uno principal.

∴ El conjunto sol. es:

$$\mathcal{L}_s = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{6}{6} z \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$



En la realidad química queremos moléculas enteras y su número debe ser no-negativo. Por eso, el conjunto solución práctico sería el siguiente subconjunto de $\mathcal{L}_s$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathcal{L}_s$$

La 1ª reacción: $(w, x, y, z) = (4, 3, 2, 6)$

1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejercicio: Un espía sabe que en cierto aeropuerto secreto hay **estacionados 60 aviones**, entre **cazas y bombarderos**. El espía desea determinar cuántos de los **60 aviones** son **cazas** y cuántos son **bombarderos**. Hay un tipo de **cohetes** que es transportado por **ambas clases de aviones**; el **caza porta seis** de estos cohetes y el **bombardero sólo dos**. El agente sabe que con **240 cohetes** quedan pertrechados por completo todos los aviones que se encuentran en el aeropuerto. Además, se enteró de que en esa base el número de **aviones caza es el doble del número de bombarderos**. Calcule el número de **aviones caza y bombarderos** que hay en el aeropuerto o bien muestre que la información del agente debe ser incorrecta, ya que es inconsistente.

Solución: Lo primero es introducir las variables.

Sea $x = \# \text{ aviones caza}$, $y = \# \text{ bombarderos}$.

$$\begin{aligned} \therefore \quad x + y &= 60 & x + y &= 60 \\ x &= 2y & \Leftrightarrow x - 2y &= 0 \\ 6x + 2y &= 240 & 6x + 2y &= 240 \end{aligned}$$

Paso 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 1 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 240 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2^N = R_2 - R_1 \\ R_3^N = R_3 - 6R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 0 & -3 & -60 \\ 0 & -4 & -120 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{l} R_2 / -3 \\ R_3 / -4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 30 \end{pmatrix}$$

$$y = 20 \text{ y } y = 30 \quad \text{⚡}$$

$$\begin{array}{l} R_3^N = R_3 - R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ La información del espía es incorrecta, puesto que el sistema es inconsistente.