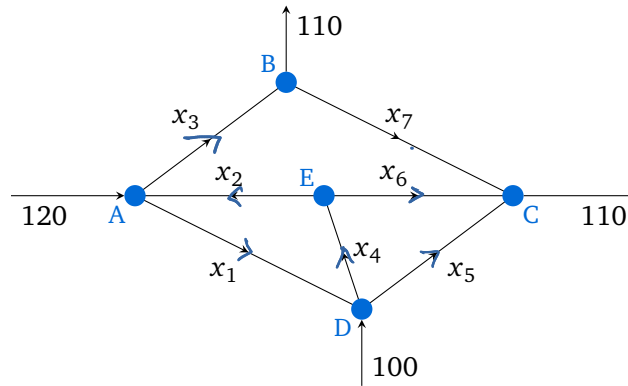


Ejemplo: Tomado del libro de Álgebra lineal de Rafael Bru, Joan Josep Climent (página 46).

Se desea organizar el tráfico por calles de una ciudad que se representa mediante el diagrama de la siguiente figura. Llegan 120 y 100 coches por hora a los puntos A y D, mientras que de los puntos B y C salen 110 coches por hora. Hallar los posibles flujos de tráfico entre calles.



Solución: Sean $x_1, x_2, \dots, x_7 =$ “# de coches que pasan por las calles $1, \dots, 7$ ”, respectivamente.

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 120 + x_2 \stackrel{A}{=} x_3 + x_1 \\
 x_3 \stackrel{B}{=} 110 + x_7 \\
 x_5 + x_6 + x_7 \stackrel{C}{=} 110 \\
 100 + x_1 \stackrel{D}{=} x_4 + x_5 \\
 x_4 \stackrel{E}{=} x_2 + x_6
 \end{array} \right\} \begin{cases}
 x_1 - x_2 + x_3 = 120 \\
 x_3 - x_7 = 110 \\
 x_5 + x_6 + x_7 = 110 \\
 -x_1 + x_4 + x_5 = 100 \\
 x_2 - x_4 + x_6 = 0
 \end{cases}
 \end{array}$$

$$(\Rightarrow) \left(\begin{array}{ccccccc|c}
 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 110 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 110 \\
 -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array} \right)$$

Resolvemos el sistema. La primera operación elemental es $R'_4 := R_4 + R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 110 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 220 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_1^N = R_1 + R_5 \\ R_4^N = R_4 + R_5 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 220 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_1^N = R_1 - R_2 \\ R_4^N = R_4 - R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_3^N = R_3 - R_4 \\ R_2 \leftrightarrow R_5 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 110 \end{array} \right]$$

$$R_3 \leftrightarrow R_5 \sim \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

De esta FER podemos leer el conjunto solución:

$$L_S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + x_4 - x_6 - x_7 \\ x_4 - x_6 \\ 110 + x_7 \\ x_4 \\ 110 - x_6 - x_7 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{N} \right\}$$

El siguiente ejemplo es una aplicación del álgebra lineal en “Cadenas de Markov”.

Ejemplo: Suponga que únicamente dos empresas rivales R, S fabrican cierto producto. Cada año, la empresa R conserva $1/4$ de sus clientes mientras que $3/4$ cambian a S . En el mismo lapso, S conserva $2/3$ de sus clientes mientras $1/3$ cambia a R .

Al comenzar por primera vez la fabricación del producto, R tiene $x_r = 3/5 = 60\%$ del mercado (el mercado es la cantidad total de los clientes), mientras S tiene los otros $x_s = 2/5 = 40\%$.

Escribimos las cantidades iniciales y la distribución de los clientes en un año como vectores:

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x_r \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Nuevo} \\ \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r/4 \\ x_r \cdot \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_s \cdot \frac{1}{3} \\ x_s \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix} = x_r \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} + x_s \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Notar que la primera entrada representa la fracción del mercado que “esta con / se queda con / se cambia a” la empresa R y la segunda entrada dice lo mismo sobre los clientes de S .

Entonces podemos definir la matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ de transición por

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 3/4 & 2/3 \end{pmatrix}$$

y un año después, la distribución del mercado es:

$$\vec{x}_1 = A \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 3/4 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \cdot 3/5 + 1/3 \cdot 2/5 \\ 3/4 \cdot 3/5 + 2/3 \cdot 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/60 \\ 43/60 \end{pmatrix}$$

Para tener un número de clientes (y no un porcentaje) tomamos que el mercado inicial tiene κ -personas, digamos $\kappa = 1200$, y supongamos que este número no se modifica con el paso del tiempo.

En este caso R tiene (después de un año):

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{5}\kappa\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\kappa\right) = \frac{17}{60} \cdot \kappa = 17 \cdot 20 = \underline{\underline{340}}$$

y S tiene (después de un año):

$$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{5}\kappa\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\kappa\right) = \frac{43}{60} \cdot \kappa = 43 \cdot 20 = \underline{\underline{860}}$$

1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

De manera análoga, al final de dos años, la distribución del mercado estará dado por

$$\vec{x}_2 = A\vec{x}_1 = A(A\vec{x}_0).$$

A las empresas les interesa mantener su número de clientes.

Si esto ocurre, es decir, cuando $A\vec{x}_0 = \vec{x}_0$, la distribución $\vec{x}_0$ del mercado se llama **estable**.

Un pregunta natural:

¿Podemos determinar una distribución del mercado que sea la misma año con año?

La respuesta: Sea $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Como R y S controlan todo el mercado, debemos tener:

$$a + b = 1$$

Además, queremos que la distribución no se modifique después de un año:

$$A\vec{x}_0 = \vec{x}_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 3/4 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} 1/4 a + 1/3 b - a &= 0 & -3/4 a + 1/3 b &= 0 \\ 3/4 a + 2/3 b - b &= 0 & 3/4 a - 1/3 b &= 0 \end{aligned}$$

Las tres ecuaciones se reducen a dos que podemos resolver:

$$\left. \begin{aligned} a + b &= 1 \\ -3/4 a + 1/3 b &= 0 \\ +3/4 a - 1/3 b &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -3/4 & 1/3 & 0 \\ 3/4 & -1/3 & 0 \end{array} \right)$$

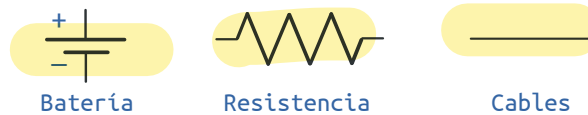
$$R_2^N = R_2 + \frac{3}{4}R_1$$

Sol.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (un circuito eléctrico):

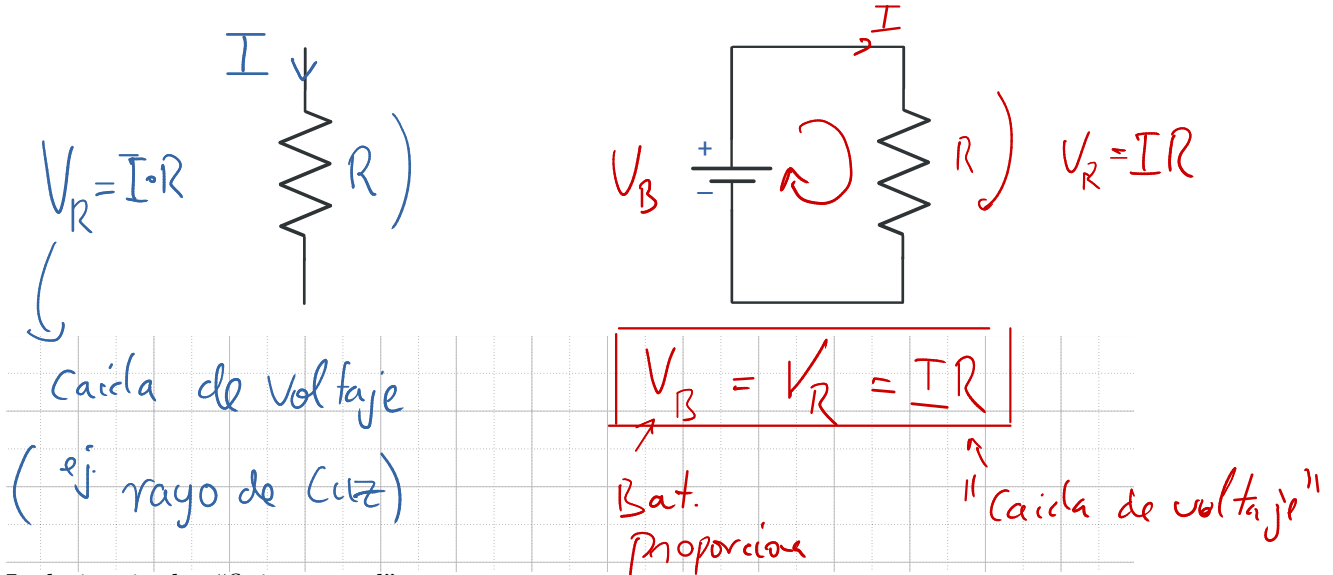
A continuación usamos la siguiente simbología:



Para este ejemplo una *red eléctrica* consiste de estas partes y dentro de ella cada conexión cerrada será un *circuito cerrado*.

La ley de Ohm:

El flujo de una corriente I que pasa por una resistencia (ej. una lámpara) requiere un potencial (un voltaje V) y es proporcional al mismo $V \sim I$. El factor de proporcionalidad depende de la resistencia R y se cumple la *ley de Ohm*: $V = IR$ donde el voltaje V se mide en *volts* [V], el flujo de corriente I en *amperes* [A] y la resistencia R en *ohms* [Ω].



Lado izquierdo: “flujo natural”

Lado derecho (circuito cerrado): batería proporciona un voltaje igual a la “caída de voltaje RI ”.

Una ley que generaliza la ley de Ohm:**Ley de Kirchhoff del voltaje:**

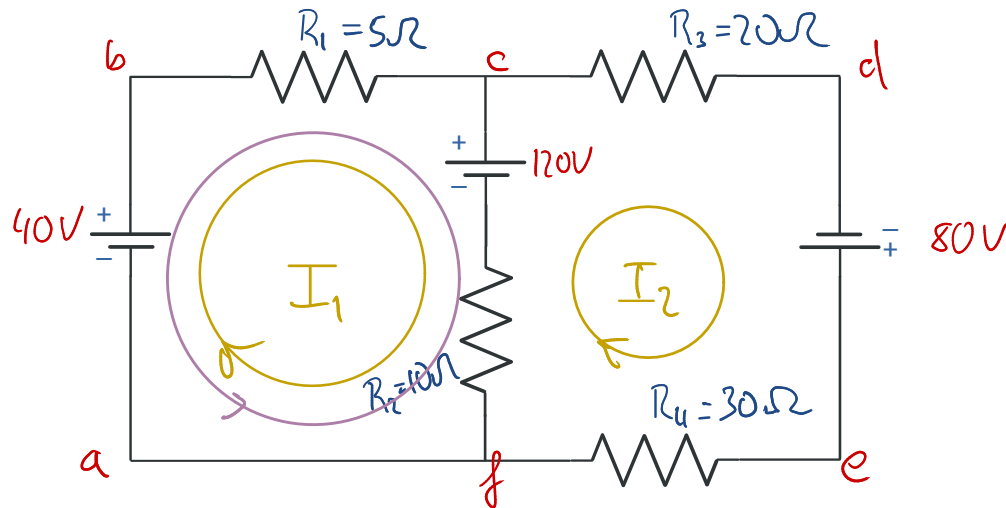
La suma algebraica de las caídas de voltaje RI en una dirección a lo largo de un circuito cerrado es igual a la suma algebraica de las fuentes de voltaje existentes en la misma dirección alrededor del circuito cerrado.

Para aplicar esa ley necesitamos dos convenciones:

- Dentro de cada circuito cerrado C_k habrá un flujo de corriente I_k al cual le asignamos una dirección adivinada. Más tarde, tras haber calculado el flujo I_k , el signo de I_k nos dirá la dirección real del flujo. Precisamente, si $I_k > 0$, la dirección real es la dirección adivinada, en otro caso, la dirección real es opuesta a la dirección adivinada.

1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

- Una batería  nos proporciona voltaje. Está considerada positiva (en los cálculos) si la dirección adivinada de la corriente sugiere que el flujo sale del lado positivo (más largo) de la batería; en el caso contrario, el voltaje será negativo.



Buscamos las corrientes:

Ciclo 1: $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow f \rightarrow a$

$$40V - 120V = 5\Omega \cdot I_1 + (I_1 - I_2) 10\Omega$$

$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ b \rightarrow c & & c \rightarrow f & & f \rightarrow c \end{matrix}$

Ciclo 2: $c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow c$:

$$120V + 80V = I_2 20\Omega + I_2 30\Omega + (I_2 - I_1) 10\Omega$$

$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ c \rightarrow d & & e \rightarrow f & & f \rightarrow c & & c \rightarrow f \end{matrix}$

$$R = \frac{V}{A}$$

$$\frac{V}{\Omega} = A$$

$$\begin{aligned} -80A &= 5I_1 + (I_1 - I_2)10 = 15I_1 - 10I_2 \\ 200A &= 50I_2 + (I_2 - I_1)10 = 60I_2 - 10I_1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10 & 60 & 200A \\ 15 & -10 & -80A \end{array} \right)$$

...

sol.

$$I_1 = -\frac{14}{9}A$$

$$I_2 = \frac{11}{4}A$$