

3. Espacios vectoriales

Algunas propiedades matemáticas que vimos son válidas para objetos de distintas categorías. Por eso, la definición de un espacio vectorial es un poquito abstracta.



Definición 3.1. Sean $\mathcal{V} \neq \emptyset$ un conjunto de objetos,

$+: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ una suma de dos objetos de $\mathcal{V}$ que da un objeto en $\mathcal{V}$ y sea

$\cdot: \mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ un producto de escalar por un objeto de $\mathcal{V}$ que da un objeto en $\mathcal{V}$.

Entonces, $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ se denomina **espacio vectorial** y sus objetos serán llamados **vectores**, cuando el conjunto y las operaciones cumplen lo siguiente:

1. Para cualesquiera dos elementos $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$, se tiene $\vec{a} + \vec{b} \in \mathcal{V}$ y

1.a) Existe un elemento especial $\vec{0} \in \mathcal{V}$ que se llama **elemento neutro** (a veces *nulo*) y cumple $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ para todo $\vec{a} \in \mathcal{V}$.

1.b) Para cada elemento $\vec{a} \in \mathcal{V}$ existe un elemento negativo $-\vec{a} \in \mathcal{V}$ el **aditivo inverso** tal que $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

1.c) La suma es **asociativa**, es decir para cada $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{V}$ se cumple

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

1.d) La suma es **conmutativa**, es decir para cada $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$ se cumple $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2. Para cada $\vec{a} \in \mathcal{V}$ y un número real r se tiene que $r\vec{a} \in \mathcal{V}$, siempre $r\vec{a} = r \cdot \vec{a}$. Además

2.a) Para todo $\vec{a} \in \mathcal{V}$ se cumple que $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, es decir 1 es el neutro de multiplicación por escalar.

2.b) Para todo $r \in \mathbb{R}$ y elementos $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$ se cumple la propiedad **distributiva**:

$$r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$

2.c) Para todo $r, s \in \mathbb{R}$ y elemento $\vec{a} \in \mathcal{V}$ se cumple la propiedad **distributiva**:

$$(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$$

2.d) Para todo $r, s \in \mathbb{R}$ y cada elemento $\vec{a} \in \mathcal{V}$ se cumple la propiedad **asociativa**. Esto es

$$r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}.$$

$e \in \mathcal{V}$

3.1. Ejemplos

Existen varios ejemplos de espacios vectoriales. A continuación veremos los 3 más comunes. Para ver si un conjunto y las operaciones $+$, $\cdot$ forman un espacio vectorial debemos verificar las 10 condiciones dadas en la definición 3.1.

3.1.1. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

A continuación probaremos que el conjunto de todos los vectores en $\mathbb{R}^n$ junto con la suma (de vectores) y multiplicación por escalar forma un espacio vectorial.

Solución: Tomamos las operaciones $+$, $\cdot$ que conocemos y el conjunto

$$V := \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} : v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Demostración. Verificamos las condiciones de la definición 3.1:

1) Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V = \mathbb{R}^n$, entonces $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$
son 2 vectores de n entradas y la suma

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

Es un vector de n entradas reales.

cada entrada es un $\mathbb{R}$. $\therefore \vec{u} + \vec{v} \in V$

1a) El vector $\vec{0}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ya que $0 \in \mathbb{R}$
y cumple

$$\vec{u} + \vec{0} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + 0 \\ \vdots \\ u_n + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \vec{u}.$$

0 es neutro en $\mathbb{R}$.

1b) Para cada $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ existe $-\vec{u} := \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$ tal que

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + (-u_1) \\ \vdots \\ u_n + (-u_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

en $\mathbb{R}$

$$1c) (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) + w_1 \\ \vdots \\ (u_n + v_n) + w_n \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\uparrow \text{ asociati-} \\ \text{en } \mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} u_1 + (v_1 + w_1) \\ \vdots \\ u_n + (v_n + w_n) \end{pmatrix} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$1d) \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\uparrow \text{ conmut.} \\ \text{en } \mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ \vdots \\ v_n + u_n \end{pmatrix} = \vec{v} + \vec{u}$$

2) Si $r \in \mathbb{R}$ y $u \in V$ entonces $r\vec{u} = \begin{pmatrix} ru_1 \\ \vdots \\ ru_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = V$

"mult. con escalar da un vector con $\underbrace{ru_i}_{\in \mathbb{R}}$ entradas reales"

2a) Para cada $\vec{u} \in V$ se cumple

$$1 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \cdot u_1 \\ \vdots \\ 1 \cdot u_n \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\uparrow \\ 1 \cdot a = a \in \mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \vec{u}$$

2b)

$$r \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = r \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(u_1 + v_1) \\ \vdots \\ r(u_n + v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ru_1 + rv_1 \\ \vdots \\ ru_n + rv_n \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{r\vec{u} + r\vec{v}}}$$

2c)

$$(r+s)\vec{u} = \begin{pmatrix} (r+s)u_1 \\ \vdots \\ (r+s)u_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{...}} = \underline{\underline{r\vec{u} + s\vec{u}}}$$

2d)

$$r(s\vec{u}) = r(s(u_i)_n) = r(su_i)_n = (r(su_i))_n = ((rs)u_i)_n = (rs)\vec{u}$$

Dado que se cumplen todas las propiedades de la definición 3.1, es decir, 1), 1. $\{a, b, c, d\}$, 2) y 2. $\{a, b, c, d\}$, concluimos que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ es un espacio vectorial. 

3.1.2. El espacio vectorial de matrices reales

El conjunto de las matrices con coeficientes reales (junto con la suma $+$ y el producto con escalar) es un espacio vectorial. Tomamos las operaciones $+, \cdot$ que conocemos y el conjunto

$$\mathcal{V} := \mathbb{R}^{m \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Demostración. Verificamos las condiciones de la definición 3.1:

1) Para cada 2 matrices $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se tiene que la suma es:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11}) & \dots & (a_{1n} + b_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1}) & \dots & (a_{mn} + b_{mn}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} = \mathcal{V}. \end{aligned}$$

1.a) La matriz

$$\begin{aligned} O_{m \times n} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ satisface} \\ A + O_{m \times n} &= (a_{ij} + 0)_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} = A. \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $a_{ij} + 0 = a_{ij} \in \mathbb{R}$

1.b) “ $-A$ ” ejercicio.

1.c)

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad \text{por p. 49 (hecho 2)}$$

1.d)

$$A + B = B + A \quad \text{por p. 49 (hecho 1)}$$

2)

$$r \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{para todo } r \in \mathbb{R}.$$

2.a)

$$1 \cdot A = (1 \cdot a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} = A.$$

2.b)

$$r(A+B) = r [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Suma de matrices

producto escalar * matriz

$$= [r(a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n}$$

ley distribut. en $\mathbb{R}$.

$$= [ra_{ij} + rb_{ij}]_{m \times n}$$

suma de matrices

$$= [ra_{ij}]_{m \times n} + [rb_{ij}]_{m \times n}$$

producto escalar * matriz

$$= r[a_{ij}]_{m \times n} + r[b_{ij}]_{m \times n}$$

$$= \underline{rA + rB.}$$

2.c) ejercicio.

2.d)

$$r \cdot (s \cdot A) = r \left(s [a_{ij}]_{m \times n} \right) \quad \text{para } r, s \in \mathbb{R}$$

producto
escalar-matriz

$$= r [s a_{ij}]_{m \times n}$$

$$= [r(s a_{ij})]_{m \times n}$$

prop. en III
asociativo

$$= [(rs) a_{ij}]_{m \times n}$$

$$= (rs) [a_{ij}]_{m \times n} = \underline{(rs) A.}$$

Dado que se cumplen todas las propiedades de la definición 3.1, concluimos que $(\mathbb{R}^{m \times n}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial. $\square$