

## 4. Combinaciones lineales

En esta sección profundizamos nuestro conocimiento de combinaciones lineales e introducimos los conceptos: “independencia lineal”, “espacios generados”, “bases” y “dimensión”.

### Introducción en el plano.

Empezaremos nuestro estudio en  $\mathbb{R}^2$ , es decir en

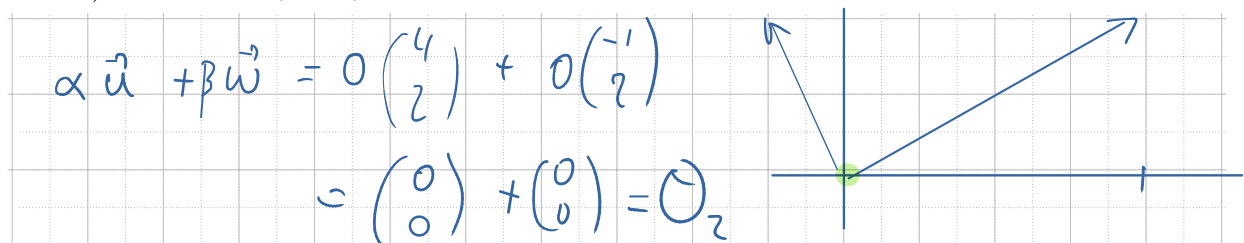
$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Supongamos que tenemos dos vectores  $\vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$  y escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Podemos visualizar “cuatro casos” de las combinaciones lineales  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$ .

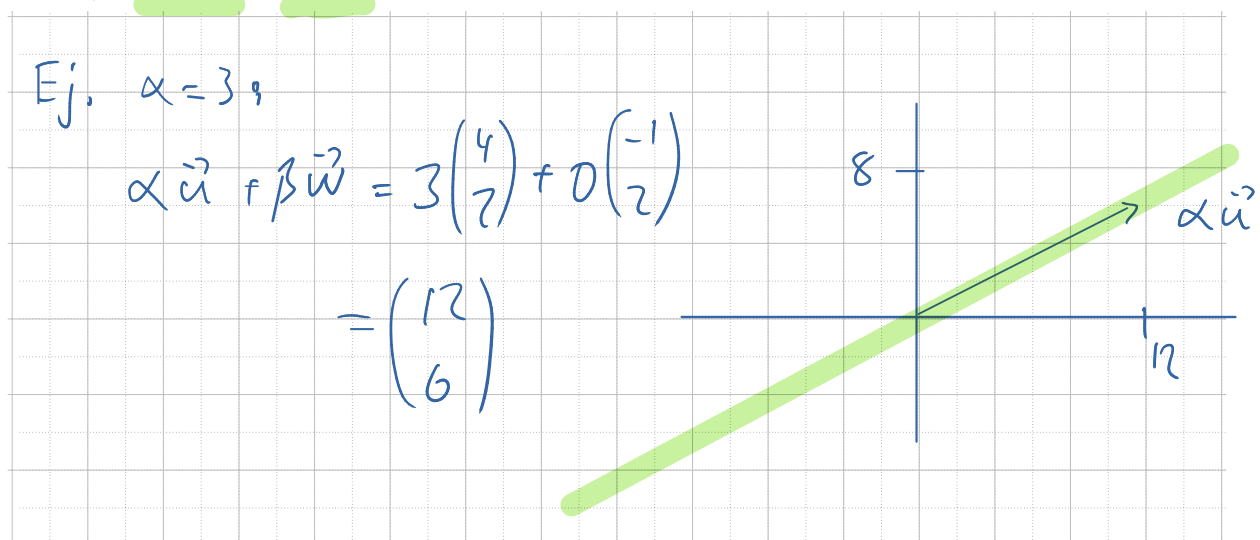
*Ejemplo (visualizamos):* Sean  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$  &  $\vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Caso 1) Si  $\alpha = 0$  &  $\beta = 0$ , entonces obtenemos



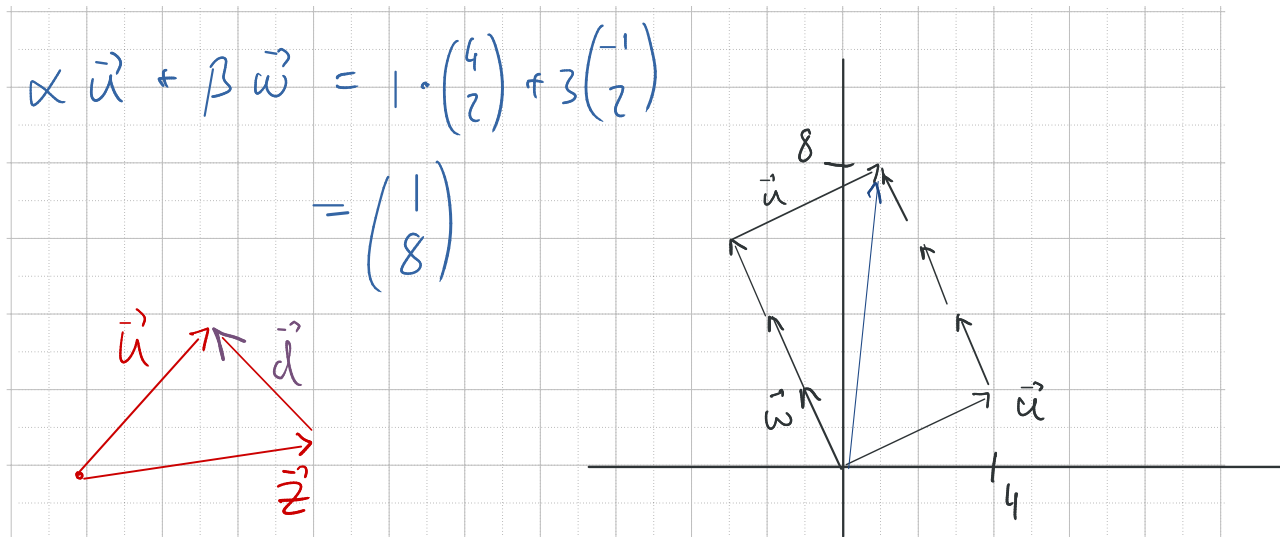
Caso 2) Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  &  $\beta = 0$ , entonces obtenemos  $\alpha\vec{u}$

“ $\alpha$ -veces la dirección de  $\vec{u}$ ”



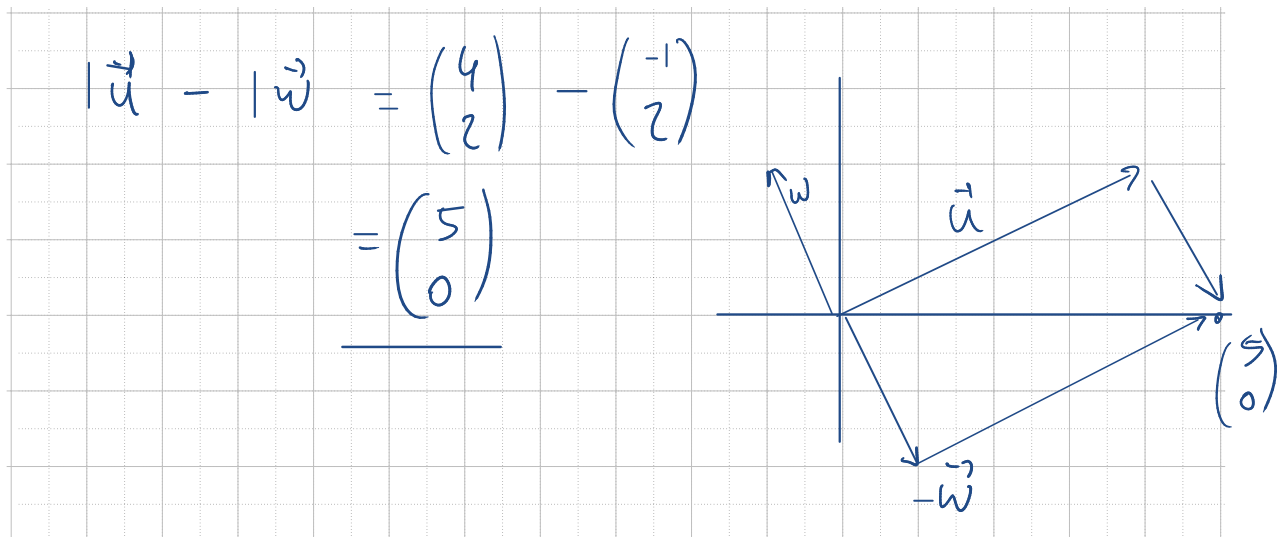
Caso 3)  $\alpha = 1$  &  $\beta = 3$

“suma de vectores con  $\alpha, \beta > 0$ ”



Caso 4) Si  $\alpha = 1$  &  $\beta = -1$ , entonces obtenemos

“resta de vectores” (dibujo importante)



**Observación:** Si quiero más que una recta, entonces necesito dos vectores. Más aún, la combinación lineal  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{w}$  permite llegar a cada punto en el plano solo cuando  $\vec{w} \neq \alpha \vec{u}$  para  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , es decir, cuando  $\alpha \vec{u}$  genera una recta y  $\vec{w}$  no es parte de esa recta.

Un concepto expuesto aquí es: “ $\vec{u}$  y  $\vec{w}$  contribuyen direcciones diferentes”.

Se dice que un vector  $\vec{u}$  es *independiente* si  $\vec{u} \neq \vec{0}$ .

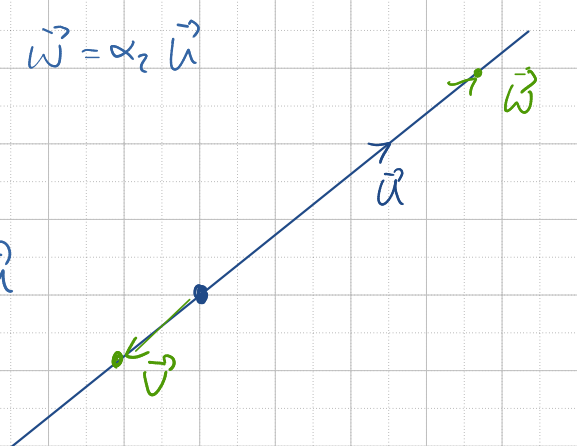
Se dice que dos vectores  $\vec{u}, \vec{w}$  son *independientes* si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  y  $\vec{w} \neq \alpha \vec{u}$  para  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## Introducción en el espacio.

Sea  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$  una combinación lineal de vectores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  escalados con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Esta combinación lineal puede tomar tres formas:

Caso I: Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  y  $\vec{v}, \vec{w} \in \{\alpha\vec{u} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ , entonces tenemos una recta.

en este caso  $\vec{v} = \alpha_1 \vec{u}$ ,  $\vec{w} = \alpha_2 \vec{u}$

$$\begin{aligned} & \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} \\ &= \alpha \vec{u} + \beta \alpha_1 \vec{u} + \gamma \alpha_2 \vec{u} \\ &= (\alpha + \beta \alpha_1 + \gamma \alpha_2) \vec{u} \end{aligned}$$


Caso II: Si  $\vec{u}, \vec{v}$  son independientes pero  $\vec{w} \in \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ , entonces tenemos un plano.

Sean  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  &  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  dos vectores independientes

entonces  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \\ \beta \end{pmatrix}$

Los vectores  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \pi \\ 2\pi \\ \pi \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ , ...

pertenece a  $\{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ . Pero, el vector  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \notin$  en el plano!

Caso III: Si  $\vec{u}, \vec{v}$  son independientes y  $\vec{w} \notin \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ , entonces se llena  $\mathbb{R}^3$ .

ej.  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Las combinaciones lineales de estos vectores "llenan" el espacio  $\mathbb{R}^3$ .



Se dice que tres vectores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  son *independientes* si  $\vec{w} \neq \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$  para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y adicionalmente  $\vec{u}, \vec{v}$  son independientes.

## En general



**Definición 4.1.** Sea  $(\mathcal{V}, +, \cdot_{\text{esc.}}^{\text{mult.}})$  un espacio vectorial. Se dice que **un vector**  $\vec{w} \in \mathcal{V}$  es **combinación lineal** de los vectores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \in \mathcal{V}$  si existen escalares  $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R}$  tales que  $\vec{w}$  se puede expresar como

$$\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_p \vec{v}_p$$

donde los escalares  $x_1, x_2, \dots, x_p$  reciben el nombre de **coeficientes de una combinación lineal**.

**Ejemplos:** Considere los vectores  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  &  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .

¿Para cuáles valores  $\gamma \in \mathbb{R}$  el vector  $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \gamma \end{bmatrix}$  es una combinación lineal de  $\vec{v}_1$  &  $\vec{v}_2$ ?

La pregunta pide verificar si  $\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \gamma \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{para algunos} \\ \text{valores } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} x_1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \gamma \end{array} \right)$$

$$\begin{matrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_2 \cdot (-1) \end{matrix} \quad \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \gamma \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \gamma \end{array} \right)$$

$\therefore$  Si  $\gamma = 0$ , entonces  $x_1 = -2, x_2 = 2$ . (W es combi. lineal de  $v_1, v_2$ )  
 e.o.c.  $\gamma \neq 0$  el sistema es inconsistente  
 en otro caso  $\therefore$  no existen  $x_1, x_2$  t.q.  $\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2$ .

**Ejercicio:** Considere los vectores  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  &  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . Compruebe si los vectores  $\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$  &  $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  son combinación lineal de los vectores  $\vec{v}_1$  &  $\vec{v}_2$ .

$\vec{w}$  no es combinación lineal de  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ .

I) Tenemos que ver si existen escalares  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $\vec{u} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$ , es decir

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 4 \\ -1 & 0 & | & -2 \\ 2 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 = R_2 - 2R_1]{R_2^N = R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & -3 & | & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

$x_1 = 2$   
 $x_2 = 1$

$\therefore \vec{u}$  es combi. lineal de  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ .

Prueba:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

II) Tenemos que ver si existen escalares  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $\vec{w} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$ , es decir

**Resultado y conclusión:** El sistema es inconsistente. Por eso, concluimos que el vector  $\vec{w}$  NO se puede escribir como combinación lineal de  $\vec{v}_1$  &  $\vec{v}_2$ . Otra formulación: No se pueden encontrar escalares  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  que satisfagan  $\vec{w} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$ .

#### 4. Combinaciones lineales

**Ejemplo:** Expresar el polinomio  $\vec{w} = t^2 + 4t - 3$  del espacio vectorial  $(\mathbb{P}_2, +, \cdot)$  como combinación lineal de los polinomios  $\vec{p}_1 = t^2 - 2t + 5$ ,  $\vec{p}_2 = 2t^2 - 3t$  y  $\vec{p}_3 = t + 3$ .

**Sol:** Supongamos que podemos escribir  $\vec{w} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + x_3\vec{p}_3$ , donde  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ :

$$\vec{w} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + x_3\vec{p}_3$$

$$t^2 + 4t - 3 = x_1(t^2 - 2t + 5) + x_2(2t^2 - 3t) + x_3(t + 3)$$

leyes distribut.  
y conmutativas.  
en 17

$$= (x_1 + 2x_2)t^2 + (-2x_1 - 3x_2 + x_3)t + (5x_1 + 3x_3)$$

Igualemos coeficientes de  $\{1, t, t^2\}$ :

$$\begin{cases} t^2 \rightarrow 1 = x_1 + 2x_2 \\ t \rightarrow 4 = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 1 \rightarrow -3 = 5x_1 + 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ -2 & -3 & 1 & | & 4 \\ 5 & 0 & 3 & | & -3 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{52}{13} = 4$$

$$x_2 = 6 - 4 = 2$$

$$x_1 = -3$$

$$\begin{aligned} R_2^* &= R_2 + 2R_1 \\ R_3^* &= R_3 - 5R_1 \\ R_1 &= R_1 - 2R_2 \\ R_3 &= R_3 + 10R_2 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -10 & 3 & | & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & -11 \\ 0 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 13 & | & 52 \end{pmatrix}$$

**Prueba:** Del sistema anterior obtenemos la combi. lineal  $x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + x_3\vec{p}_3$ . ¿Es igual a  $\vec{w}$ ?

$$\begin{aligned} & -3(t^2 - 2t + 5) + 2(2t^2 - 3t) + 4(t + 3) \\ &= (-3 + 4)t^2 + (6 - 6 + 4)t - 15 + 12 \\ &= t^2 + 4t - 3 = \vec{w} \end{aligned}$$

