

4.1. Conjuntos generados



Definición 4.2. Sea $(\mathcal{V}, +, \cdot \text{ mult. esc.})$ un espacio vectorial. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \in \mathcal{V}$. Entonces, el **conjunto generado** por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ denotado por $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores, i.e.

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} = \left\{ x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_p\vec{v}_p \mid x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R} \right\}.$$

Las siguientes notaciones representan al mismo conjunto:

$$\text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \rangle = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}.$$

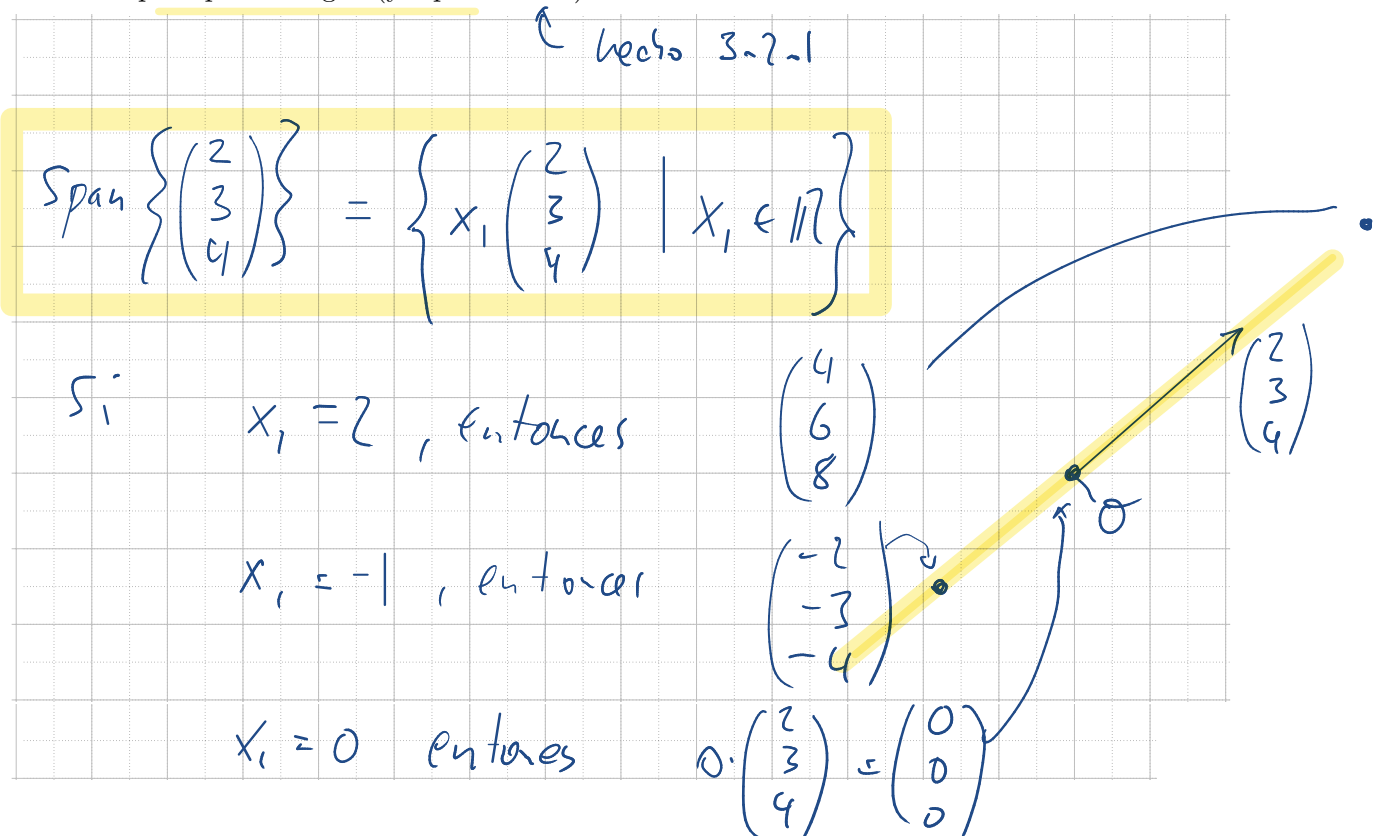
Ejemplo: Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\text{span}\{\vec{v}\} = \{x_1\vec{v} \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.

Si $\vec{v} = \vec{0}$, entonces

$$\text{span}\{\vec{0}\} = \text{span}\{\vec{0}\} = \{x_1\vec{0} \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \{\vec{0}\} \quad \text{hecho 3.2.4.}$$

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces el $\text{span}\{\vec{v}\} = \{x_1\vec{v} \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ es una recta infinita en $\mathcal{V}$.

Esa recta pasa por el origen (ya que $0\vec{v} = \vec{0}$) & va en dirección de $\vec{v}$ ó $-\vec{v}$.



Por definición tenemos $\vec{v} \in \text{span}\{\vec{w}\}$ si y solo si existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = x_1\vec{w}$.

Si $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ entonces por definición $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p \in \mathbb{R}^n$ y $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

4. Combinaciones lineales

Ejemplo: Sean $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ & $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Describe $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Sol:

Sabemos que $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3 \therefore \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$

se pide encontrar todas las combinaciones lineales de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

Si $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, entonces existen escalares $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 = x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2/2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2/2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -b \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Alt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & | & a \\ -1 & 0 & | & b \\ 0 & 0 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow (-1)]{R_1 \cdot 2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 2a \\ 1 & 0 & | & -b \\ 0 & 0 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -b \\ 0 & 1 & | & 2a \\ 0 & 0 & | & c \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \vec{w} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \Leftrightarrow$ el sistema es consistente $(c=0)$.

Ejemplo: Sean $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ & $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Describa al conjunto $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Sol: Buscamos todos los puntos dentro de $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$, es decir, buscamos cuales condiciones deben cumplir. Sabemos

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & | & a \\ 0 & 1 & | & b \\ 5 & 0 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \cdot 2]{R_1' = R_1 - 3R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & a-3b \\ 0 & 1 & | & b \\ 10 & 0 & | & 2c \end{pmatrix}$$

$$\underline{R_3^N = R_3 - 5R_1} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & a-3b \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2c-5a+15b \end{array} \right)$$

El sistema es consistente si:

$$\underline{2c - 5a + 15b = 0}$$

De este modo:

$$\text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2c - 5a + 15b = 0 \right\}$$

"es un plano en forma normal"

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \}.$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} "$$

IMPORTANTE : Si $\vec{x}_*$ es solución de un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, entonces

$$\vec{b} \in \text{span} \{ A_{[:,1]}, A_{[:,2]}, \dots, A_{[:,n]} \} = \text{Img}(A)$$

Demostración.

$$\vec{b} = A\vec{x}^* = x_1^* \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2^* \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n^* \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= x_1^* A_{:,1} + x_2^* A_{:,2} + \dots + x_n^* A_{:,n} \in \text{span} \{ A_{:,1}, A_{:,2}, \dots, A_{:,n} \}$$

$$\text{Img}(A) = \{ A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n \}$$

$$= \{ x_1 A_{:,1} + x_2 A_{:,2} + \dots + x_n A_{:,n} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

$$= \text{span} \{ A_{(:,1)}, A_{(:,2)}, \dots, A_{(:,n)} \}$$



4. Combinaciones lineales

Los siguientes ejemplos motivan el uso de “elementos de $\mathcal{V}$ ” para definir un conjunto generado.

Ejemplo: En página 88 vimos que un polinomio $\vec{w}$ de grado 2 era combinación lineal de $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$. El resultado era: $\vec{w} = t^2 + 4t - 3 = -3\vec{p}_1 + 2\vec{p}_2 + 4\vec{p}_3$, por lo cual $\vec{w} \in \text{span}\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$, es decir “ $\vec{w}$ pertenece al conjunto generado por $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$.”

Ejercicio: Considere los vectores $\vec{w} = 1 + t + 4t^2$ y $\vec{v} = 1 + 5t + t^2$ en $(\mathbb{P}_2, +, \cdot)$ y determine si $\vec{w}$ & $\vec{v}$ llacen en $\text{span}\{1 + 2t - t^2, 3 + 5t + 2t^2\}$.

Inicio de solución:

$$\vec{w} = \alpha(1 + 2t - t^2) + \beta(3 + 5t + 2t^2)$$

$$1 + t + 4t^2 = (\alpha + 3\beta) + (2\alpha + 5\beta)t + (-\alpha + 2\beta)t^2$$

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + 3\beta \\ 1 &= 2\alpha + 5\beta \\ 4 &= -\alpha + 2\beta \end{aligned} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

$\vec{w} \in \text{span}\{\dots\} \rightsquigarrow \beta = 1, \alpha = -2$

Ejemplo: Demuestre que el conjunto $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ de matrices 2×2 es generado por el conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Lo anterior se debe a que cualquier matriz de (2×2) de la forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ se puede escribir como combinación lineal de las matrices arriba, puesto que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Demuestre que $\mathbb{P}_n$ es conjunto de polinomios de grado (a los más) n es generado por el conjunto $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

Solución: Todo polinomio $\vec{p} \in \mathbb{P}_n$ de grado $\leq n$ se puede escribir como

$$\vec{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = a_0 \cdot 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

con escalares $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, lo cual es una combinación lineal de elementos de $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. Con eso hemos confirmado la igualdad $\text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\} = \mathbb{P}_n$.



Lema 4.1. Sea $(V, +, \cdot \text{mult.}_{\text{esc.}})$ un espacio vectorial. Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1} \in V$ "vectores".
Entonces:

- i) $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} \subseteq \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}\}$
- ii) Si $\vec{v}_{p+1} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$, entonces $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}\}$
- iii) Sea $S := \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$, entonces $\vec{0} \in S$ y $(S, +, \cdot \text{mult.}_{\text{esc.}})$ es un espacio vectorial.

Demostración.

- i) Sea $\vec{w} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$, entonces $\exists x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} \vec{w} &= x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_p \vec{v}_p + \vec{0} \\ &= x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_p \vec{v}_p + \underbrace{\vec{0} \cdot \vec{v}_{p+1}}_{= \vec{0} \text{, hecho 3.2.1, p. 74}} \end{aligned}$$

Def. 3.1

$\therefore \vec{w} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}\}$

$\therefore \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subseteq \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}\}$

- ii) Por i) ya sabemos $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subseteq \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}\}$.

Resta demostrar que $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \supseteq \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}\}$.

Sea $\vec{w} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}\}$, entonces existen escalares $x_1, \dots, x_p, x_{p+1} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{w} = x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_p \vec{v}_p + x_{p+1} \vec{v}_{p+1}$$

Por otro lado, por la hipótesis $\vec{v}_{p+1} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ existen escalares $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{v}_{p+1} = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_p \vec{v}_p$$

Sustituyendo esa identidad en la anterior de $\vec{w}$ y usando definición 3.1 obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{w} &= x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_p \vec{v}_p + x_{p+1} (a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_p \vec{v}_p) \\ &\stackrel{2b)}{=} x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_p \vec{v}_p + x_{p+1} (a_1 \vec{v}_1) + \dots + x_{p+1} (a_p \vec{v}_p) \\ &\stackrel{2c)}{=} x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_p \vec{v}_p + (x_{p+1} a_1) \vec{v}_1 + \dots + (x_{p+1} a_p) \vec{v}_p \\ &\stackrel{1d), 2b)}{=} (x_1 + x_{p+1} a_1) \vec{v}_1 + \dots + (x_p + x_{p+1} a_p) \vec{v}_p \\ &= \gamma_1 \vec{v}_1 + \gamma_2 \vec{v}_2 + \dots + \gamma_p \vec{v}_p \quad \text{con} \quad \gamma_i = (x_i + x_{p+1} a_i) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Concluimos que $\vec{w} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ ya que es combinación lineal de estos vectores.

4. Combinaciones lineales

iii) Dado que $(V, +, \cdot)$ es espacio vectorial, aprovechamos el teorema 3.1.

Por $v_1, \dots, v_p \in V$ sabemos $x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_p \vec{v}_p \in V$
tenemos $S = \text{span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p \} \subseteq V$.

• $0 = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_p \therefore 0 \in S$.
 $\uparrow$
 hecho 3.2.1

• $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in S$ $\because$ como $w_1, w_2 \in S$ sabemos

$$\vec{w}_1 = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p$$

$$\vec{w}_2 = \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_p \vec{v}_p$$

$\therefore \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{v}_1 + \dots + (\alpha_p + \beta_p) \vec{v}_p$
 $= \gamma_1 \vec{v}_1 + \dots + \gamma_p \vec{v}_p$

$\therefore w_1 + w_2 \in \text{span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p \}$.

• Sea $\vec{w} \in S$ y $\gamma \in \mathbb{R} \therefore \gamma \vec{w} = \gamma (x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_p \vec{v}_p)$
 $\stackrel{(2b)}{=} \gamma (x_1 \vec{v}_1) + \dots + \gamma (x_p \vec{v}_p)$
 $\stackrel{(2c)}{=} (\gamma x_1) \vec{v}_1 + \dots + (\gamma x_p) \vec{v}_p$

$\therefore \gamma \vec{w} \in \text{span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p \}$. □

EC
 $\therefore$ Teo. 3.1 confirm que
 $(\text{span} \{ v_1, \dots, v_p \}, +, \cdot)$ es (sub) espacio vectorial de $(V, +, \cdot)$.