

$$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

4.1. Conjuntos generados

Ejemplo: El conjunto generado permite cambiar elementos.

Sean $\vec{u}$ & $\vec{v}$ dos vectores en el espacio vectorial $(V, +, \cdot)$. Demuestre que

$$\text{span}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \text{span}\{\vec{u} + 2\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}.$$

Demostración. " $\subseteq$ ": Por demostrar $\text{span}\{\vec{u} + 2\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\} \subseteq \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

$$\begin{aligned} \text{Sea } \vec{w} &= \alpha(\vec{u} + 2\vec{v}) + \beta(\vec{u} - \vec{v}) \in \text{span}\{\vec{u} + 2\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\} \\ &= \alpha\vec{u} + 2\alpha\vec{v} + \beta\vec{u} - \beta\vec{v} \quad \text{Def. 3.1 (2b)} \\ &= \underbrace{(\alpha + \beta)}_{\in \mathbb{R}}\vec{u} + \underbrace{(2\alpha - \beta)}_{\in \mathbb{R}}\vec{v} \quad \text{Def. 3.1 (1c, 1d, 2b)} \\ \therefore \vec{w} &\in \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}\} \\ \therefore \text{span}\{\vec{u} + 2\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\} &\subseteq \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}\}. \end{aligned}$$

" $\supseteq$ ": Por demostrar $\text{span}\{\vec{u} + 2\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\} \supseteq \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$. Esa parte se simplifica si justificamos que $\vec{u}, \vec{v}$ son elementos de $\text{span}\{\vec{u} + 2\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$. Por eso determinamos sus combinaciones lineales:

$$\begin{aligned} 0\vec{v} + \vec{u} &= x_1(\vec{u} + 2\vec{v}) + x_2(\vec{u} - \vec{v}) = (x_1 + x_2)\vec{u} + (2x_1 - x_2)\vec{v} \\ \& \quad \vec{v} &= x_3(\vec{u} + 2\vec{v}) + x_4(\vec{u} - \vec{v}) = (x_3 + x_4)\vec{u} + (2x_3 - x_4)\vec{v}. \end{aligned}$$

$1 = x_1 + x_2$
 $0 = 2x_1 - x_2$
 $0 = x_3 + x_4$
 $1 = 2x_3 - x_4$

La primera igualdad se cumple para $x_1 = 1/3, x_2 = 2/3$ y la segunda para $x_3 = 1/3, x_4 = -1/3$.

Ahora, sea $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$, entonces

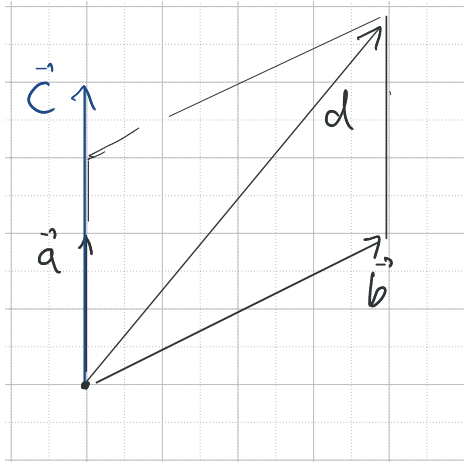
$$\begin{aligned} \vec{w} &= \alpha \left[\frac{1}{3}(\vec{u} + 2\vec{v}) + \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v}) \right] + \beta \left[\frac{1}{3}(\vec{u} + 2\vec{v}) - \frac{1}{3}(\vec{u} - \vec{v}) \right] \\ &= \underbrace{\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\alpha}{3} \right)}_{\in \mathbb{R}}(\vec{u} + 2\vec{v}) + \underbrace{\left(\frac{2\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} \right)}_{\in \mathbb{R}}(\vec{u} - \vec{v}) \quad \text{Def. 3.1 (2b, 1d, 1c)} \\ \therefore \vec{w} &\in \text{span}\{\vec{u} + 2\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\} \\ \therefore \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}\} &\subseteq \text{span}\{\vec{u} + 2\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\} \quad \square \end{aligned}$$

Debido al ejemplo anterior podemos escribir cada punto en $\mathbb{R}^2$ en distintas coordenadas. Por ejemplo, en $\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ o en $\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

4.2. Dependencia e independencia lineal

Esta sección generaliza la “independencia de vectores” que vimos en las clases 10 y 11.

Figura A:



¿Se puede escribir el vector $\vec{c}$ en términos del vector $\vec{a}$?

Si, ya que $\vec{c} = 2\vec{a}$.
"c es combi. lineal de a".

¿El vector $\vec{d}$ es combinación lineal de $\vec{a}$ & $\vec{b}$?

Si, $\vec{d} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}$



Definición 4.3. Los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ serán **linealmente dependientes (l.d.)** cuando al menos uno de estos vectores se puede escribir como combinación lineal de los otros. En el caso opuesto, los vectores serán **linealmente independientes (l.i.)**.

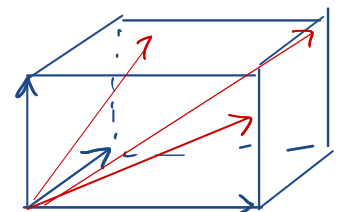
Ejemplos:

L.D. $\{\vec{a}, \vec{c}\}$, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$, $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\}$, $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}, \vec{d}\}$

L.I. $\{\vec{a}\}$, $\{\vec{c}\}$, $\{\vec{b}\}$, $\{\vec{d}\}$, $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, $\{\vec{a}, \vec{d}\}$, $\{\vec{c}, \vec{d}\}$

Observaciones:

- Cuando varios vectores son l.d., pueden ocurrir dos casos: i) Cada vector (del espacio) es combinación lineal de ellos, ii) existen vectores que no son combinación lineal de ellos.
- Para los vectores en el plano (véase Fig. A) se cumple:
 - a) A lo más dos vectores en un plano son linealmente independientes.
 - b) Un vector siempre se puede poner en combinación lineal de dos vectores linealmente independientes.
- Para los vectores en el espacio (véase Fig. B) se cumple:
 - a) A lo más tres vectores en el espacio son linealmente independientes.
 - b) Un vector siempre se puede poner en combinación lineal de tres vectores linealmente independientes: $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.



$$A \Rightarrow B \quad (A \wedge \neg B \dots \text{falso})$$

4.2. Dependencia e independencia lineal

La formulación de la definición 4.3 sugiere que verificar dependencia lineal es una tarea de **combinatoria**. El siguiente teorema propone “la forma” más usada de verificar la propiedad de ser linealmente (in)dependiente.

Teorema 4.2 (Independencia Lineal). Los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ son linealmente independientes (l.i.) si y solamente si la ecuación $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_p\vec{v}_p = \vec{0}$ tiene una única solución, la trivial ($x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$).

Demostración. “ $\Rightarrow$ ” Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ vectores l.i.

Supongamos por contradicción que existe otra solución $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_p) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tal que

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_p\vec{v}_p = \vec{0}. \quad (*)$$

entonces al menos uno de los x_i es distinto de cero. Sin pérdida de gen., (s.p.g.) $x_i \neq 0$ y dividir entre x_i es posible

$$x_1\vec{v}_1 + \dots + x_i\vec{v}_i + \dots + x_p\vec{v}_p = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_i}\vec{v}_1 + \dots + \frac{x_i}{x_i}\vec{v}_i + \dots + \frac{x_p}{x_i}\vec{v}_p = \vec{0}$$

Despejamos $\vec{v}_i$:

$$\vec{v}_i = -\frac{x_1}{x_i}\vec{v}_1 - \dots - \frac{x_{i-1}}{x_i}\vec{v}_{i-1} - \frac{x_{i+1}}{x_i}\vec{v}_{i+1} - \dots - \frac{x_p}{x_i}\vec{v}_p$$

$\therefore v_i$ es comb. lineal de $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p\}$ Contradice que $\{v_1, \dots, v_p\}$ es L.I.

“ $\Leftarrow$ ” Por hipótesis tenemos que $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ es la única solución de la combinación lineal $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_p\vec{v}_p = \vec{0}$.

Supongamos que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ no son linealmente independientes, entonces uno de ellos se puede poner en combinación lineal de los otros. Sin pérdida de generalidad (w.l.o.g.) podemos considerar a $\vec{v}_1$ y ponerlo en combinación lineal de los otros, es decir, existen escalares $a_2, a_3, \dots, a_p$ tales que

$$\vec{v}_1 = a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + \dots + a_p\vec{v}_p \quad \Leftrightarrow \quad \vec{0} = -\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + \dots + a_p\vec{v}_p.$$

La segunda igualdad da una segunda solución a la ecuación $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_p \vec{v}_p = \vec{0}$ con $x_1 = -1 \neq 0$, por lo cual, **contradice que la única solución es $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$** . Se concluye que los vectores son linealmente independientes. $\blacksquare$

Ejemplo 1: Decida si los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes.

Solución: Por el teorema 4.2 es suficiente ver si la solución del sistema $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$ es única.

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2^N = R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{array} \right) \therefore \begin{array}{l} -5x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \\ x_1 = -3x_2 = 0 \end{array}$$

$\therefore$ La única sol. es $x_1 = x_2 = 0$. $\therefore \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es L.I.

Ejemplo 2: Decida si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes.

Solución: Se ocupa el teorema 4.2 (Independencia Lineal) para mostrar si los vectores son linealmente independiente ó dependiente. Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2^N = R_2 - 2R_1 \\ R_3^N = R_3 + 3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 13 & 13 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2^N / -8 \\ R_3^N / 13}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3^N = R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\therefore r = r < n = 3$ y x_3 es libre,

$\therefore$ una sol. no-trivial. $x_3 = 1, x_2 = -1, x_1 = 2$

$\therefore$ los vectores son L.D. (no L.I.).



IMPORTANTE : El teorema 4.2 interpretado para vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subset \mathbb{R}^m$: Los vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ son linealmente independientes si y solo si el sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ con la matriz cuyas columnas son los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ tiene una única solución (la trivial), es decir el siguiente sistema debe tener únicamente la solución cero:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Es decir, el rango de A debe ser $r = p$, lo cual solo puede suceder cuando $p \leq m$.

Ejemplo 3: Determine si el conjunto de polinomios $\{1 - x, 2 + x + 2x^2, 1 + x^2\}$ es linealmente independiente.

Solución: Por el teorema 4.2 es suficiente ver si $\alpha = \beta = \gamma = 0$ es la única solución de

$$\alpha(1 - x) + \beta(2 + x + 2x^2) + \gamma(1 + x^2) = \vec{0}$$

$$(\alpha + 2\beta + \gamma) + (-\alpha + \beta)x + (2\beta + \gamma)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\begin{array}{l} \text{"1"} \\ \text{"x"} \\ \text{"x}^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

resolver da

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$$

$\therefore$ debido a $\alpha = \beta = \gamma = 0$ el Teo. 4.2
permite concluir que los polinomios
son. L.I.

4. Combinaciones lineales

Ejemplo 4: Determine si las siguientes matrices son linealmente independientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución: Por el teorema 4.2 de la independencia lineal, tenemos que mostrar que $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$ implica $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\begin{aligned} & \alpha A + \beta B + \gamma C = 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha + \beta + \gamma & \alpha + \gamma & \alpha & \alpha + \beta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \alpha = 0 \quad \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ & \alpha + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ & \therefore \text{Las matrices son L.I.} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ejemplo 5: Determine si el conjunto de funciones $\{\sin x, \cos x\}$ es linealmente independiente (en el espacio vectorial de las funciones reales continuas en $[0, 2\pi)$).

Sol.: Sean $\vec{u} = \sin x$ & $\vec{v} = \cos x$. Entonces, por el teorema 4.2 de la independencia lineal, tenemos que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$ debe implicar $\alpha = \beta = 0$. Dado que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0} = 0(x)$ equivale a

$$\alpha(\sin x) + \beta(\cos x) = 0 \quad \text{para todo } x \in [0, 2\pi),$$

podemos tomar puntos particulares en el intervalo $[0, 2\pi)$.

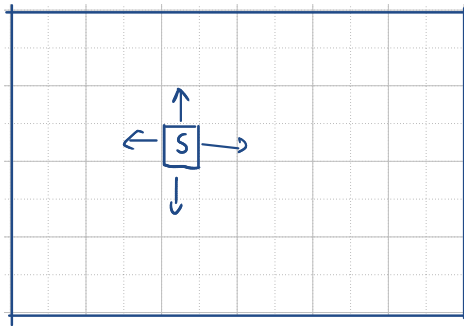
Tomando $x = 0$, obtenemos $0 = \alpha(\sin 0) + \beta(\cos 0) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = \beta$ y tomando $x = \pi/2$, obtenemos $0 = \alpha(\sin \pi/2) + \beta(\cos \pi/2) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha$. Concluimos que $\alpha = \beta = 0$ y por el teorema 4.2 sigue que las funciones son linealmente independientes.

4.3. Bases y dimensión

Comenzaremos esta sección con el siguiente ejemplo:

Un cabezal de un *plotter* S se mueve a través de una barra hacia arriba y hacia abajo, también hacia un lado y hacia otro, como se visualiza en la figura. Conteste las siguientes preguntas:

Figura:



a) ¿Con estos movimientos se llegan a todos los puntos del plano, i.e. se cubre todo el plano?

Sí, se cubre el plano.

b) ¿Habrá una ventaja cuando se permiten movimientos adicionales en otro ángulo (distinto a 90°)?

No, para el resultado final.

c) ¿Cuántas direcciones de movimientos son necesarias en un “aparato” con el fin de que se cubran todos los puntos del espacio? $\rightarrow \mathbb{R}^3$

Con movimientos en 3 direcciones.

Las preguntas y respuestas anteriores motivan la siguiente definición de bases.



Definición 4.4. Sea $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Un conjunto de vectores $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\} \subset \mathcal{V}$ es una **Base** de $\mathcal{V}$ cuando se cumplen las dos condiciones:

- los vectores $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ son linealmente independientes
- y $\mathcal{V} = \text{span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$, es decir, cada vector $\vec{w} \in \mathcal{V}$ es combinación lineal de estos vectores.

Ejemplo 1: Compruebe que los vectores $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ & $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ forman una base de $\mathbb{R}^2$.

sea $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ entonces $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Veamos si $\vec{w}$ es combi. lineal de $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & w_1 \\ 1 & 1 & w_2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 - w_1 \end{array} \right)$$

$$\therefore x_1 = \omega_1 \quad \text{y} \quad x_2 = \omega_2 - \omega_1$$

$$\therefore x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 = \omega_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (\omega_2 - \omega_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \therefore \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} \text{ genera } \mathbb{R}^2.$$

Si $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces $x_1 = x_2 = 0$ $\therefore \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ son L.I.

Juntas, las 2 condiciones prueban que $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ es base de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio: "Las bases no son únicas." Pruebe que los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^2$:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \quad \& \quad B_3 = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ejemplo 2: ¿Los vectores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u}\}$ con $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ forman una base de $\mathbb{R}^2$?

No, ya que $\vec{u}$ es combi. lineal de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

$\therefore \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u}\}$ es linealm. depend. (L.D.)

Ejemplo 3: ¿Los vectores $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ & $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ forman una base de $\mathbb{R}^3$?

No, ya que $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ con $c \neq 0$ no satisface

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{array} \right) \therefore \text{inconsistente} \therefore \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ no genera $\mathbb{R}^3$.
($c \neq 0$)

Interpretación: Una base de $\mathcal{V}$ es un sub-conjunto finito de tamaño mínimo que a la vez permite generar todos los vectores en $\mathcal{V}$.

Corolario 4.3. Los siguientes vectores (vectores canónicos) forman una base de $\mathbb{R}^n$:

$$\left\{ \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$