

Demostración. El razonamiento es similar al ejemplo 1.

Sea $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, entonces existen escalares $x_1, \dots, x_n$ tales que

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\therefore$ La solución de este sistema es $x_i = w_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$

$\therefore$ los $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ generan a $\mathbb{R}^n$ y la sol. es única

$$\therefore \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

Por Teo. 4.2 los vectores canónicos son $\mathcal{L.I.}$ □

Más adelante demostraremos que dos bases del mismo $\mathcal{V}$ tienen el mismo número de elementos.

Por eso, la siguiente definición tiene sentido.

 **Definición 4.5.** Al número de vectores de una base de $\mathcal{V}$ se le denomina **dimensión de $\mathcal{V}$** ($\dim \mathcal{V}$).

Ejemplos:

- La dimensión del plano $\mathbb{R}^2$ es dos, ya que $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es una base.
- La dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$ es tres, ya que $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es una base.
- La dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n , ya que $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es una base.
- La dimensión de matrices $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ es 4, ya que una base es

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- La dimensión de los polinomios de grado a lo mas n es $n+1$, ya que el conjunto $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ tiene $n+1$ elementos, es linealmente independiente y genera esos polinomios.

Esos ejemplos dejan realizar que encontrar una base y la dimensión de espacios vectoriales “completos” no es un gran desafío. Lo que interesa en teoría, aplicaciones y en optimización es la dimensión de sub-espacios.

4.3.1. Bases y dimensión de sub-espacios

Sean $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $(S, +, \cdot)$ con $S \subseteq \mathcal{V}$ un sub-espacio vectorial.

Por la definición 3.2 la tupla $(S, +, \cdot)$ también es un espacio vectorial.

Conclusión: Por las definiciones 4.4 & 4.5 el conjunto S tiene una base y una dimensión.

En general, cuando S es subconjunto estricto de $\mathcal{V}$ ($S \subsetneq \mathcal{V}$) tendremos $\dim S < \dim \mathcal{V}$.

Ejemplo 1: Los vectores $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ & $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ forman una base de $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0 \right\}$.

$$\text{Sea } \vec{w} \in S \quad \therefore \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \therefore \text{el sistema es consistente} \quad (\therefore w \in \text{span} \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \})$$

$\therefore$ El sistema tiene sol. única (ya que $r = n = 2$)
y el Teo 4.2 $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ es lineal. indep. (L.I.)

El lema 3.2 dice que el conjunto $\text{Null}(A)$, de las soluciones $\vec{x}$ de un sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ con una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, es un (sub-)espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, tiene una base y dimensión.

Ejemplo 2: Encuentre una base y la dimensión del conjunto de soluciones del siguiente sistema homogéneo: $x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0$.

$$\text{La matriz } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -3x_2 + 5x_3$$

$$L_s = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_2 + 5x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ La base es } \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ya que genera y es L.I.

$\therefore$ La dimensión es 2. (ya que la base tiene 2 elementos)

Ejemplo 3: (Determinar una base y dimensión de un espacio nulo)

Encuentre una base y la dimensión del conjunto de soluciones del siguiente sistema:

$$x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 9x_4 - 6x_5 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & 9 & -6 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2^N = R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & 9 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -19 & 10 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1^N = R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 29 & 47 & -26 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -19 & 10 & 0 \end{array} \right)$$

$\therefore$ 3 vars. libres. Los llamamos

$$\underline{x_3 = a, \quad x_4 = b, \quad x_5 = c}$$

entonces

$$x_1 = -29a - 47b + 26c$$

$$x_2 = 11a + 19b - 10c$$

y el conjunto solución es:

$$\mathcal{L}_s = \left\{ \begin{pmatrix} -29a - 47b + 26c \\ 11a + 19b - 10c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Null}(A)$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} -29 \\ 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -47 \\ 19 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 26 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -29 \\ 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -47 \\ 19 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 26 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



Valioso: Sea r el rango de A de $m \times n$, entonces en los ejemplos anteriores se reconoce la siguiente igualdad:

$$\text{"número de variables libres"} = \dim(\text{Null}(A)) = n - r.$$

La segunda igualdad es conocida como el "Teorema del Rango".

4. Combinaciones lineales



Valioso: Las columnas de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son linealmente independientes si y solo si el sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene solución única (**ver teorema 4.2**). Eso solo ocurre si $r = \text{rango}(A) = n$.

Conclusión: Las variables básicas indican columnas lin. indep., mientras cada variable libre identifica un columna lin. dependiente.

Ejemplo 4: Encuentre una base del conjunto $\text{span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \text{Img}(A)$ donde

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v} + x_3 \vec{w} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} R_2^N = R_2 - 3R_1 \\ R_3^N = R_3 - 5R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \\ 0 & 8 & -24 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2/5 \\ R_3/8 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} R_1^N = R_1 + R_2 \\ R_3^N = R_3 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \therefore \text{free 1 var. libre (r < n)} \\ \therefore \text{muchas soluciones.} \\ \therefore \text{Teo 4.2} \Rightarrow \text{columnas L.D.} \end{array}$$

Más aún, si $x_3 = 1$, entonces $x_1 = -2$,
 $x_2 = 3$

$$\therefore -2\vec{u} + 3\vec{v} + 1\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \underline{\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}}$$

" $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$."

106 Por el lema 4.1b:

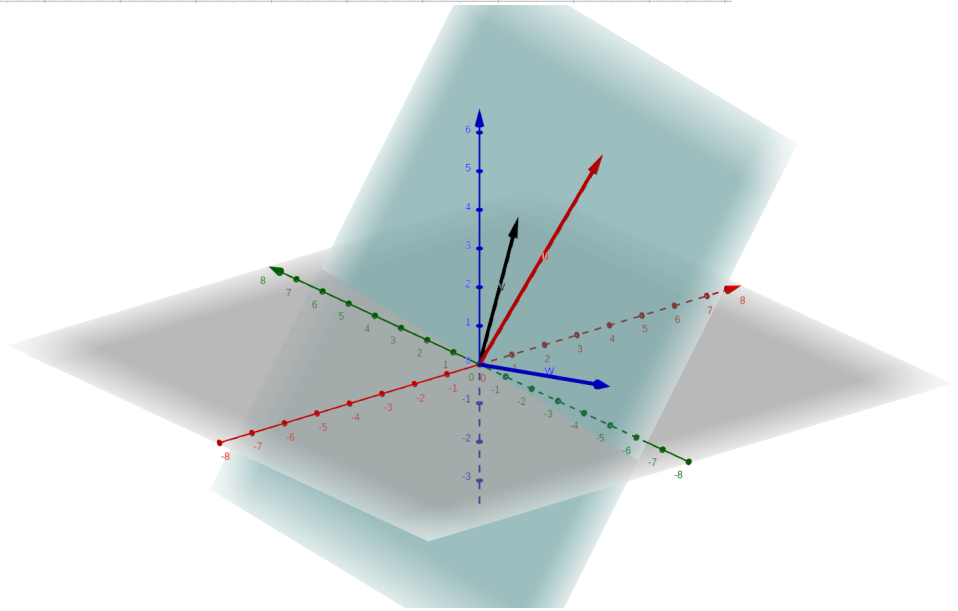
$$\text{Im}g(A) = \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}\}.$$

Más aún, la FER de $\hat{A} = [\vec{u}, \vec{v}]$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

y por lo tanto $\vec{u}, \vec{v}$ son $\angle. I.$ (Teo. 4.2)

$\therefore \underbrace{\{\vec{u}, \vec{v}\}}_{\text{dos vectores}} \text{ es base de } \underbrace{\text{span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}}_{\text{muchos vectores}} = \text{Im}g(A)$

Geométicamente significa que los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ yacen todos en el mismo plano. Cada pareja de estos vectores podría servir como base del plano. Pero, los unos principales en la FER de A identifican $\vec{u}, \vec{v}$.



Definición (Espacio Columna). Sea A una matriz de $m \times n$. El sub-espacio $\text{Im}g(A)$ de $\mathbb{R}^m$, generado por las columnas de A , también se denota por $\text{Col}(A)$:

$$A = \begin{bmatrix} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \dots & \text{columna n} \end{bmatrix} \therefore \text{Col}(A) = \text{Im}g(A) = \text{span}\left\{ \text{columna 1}, \text{columna 2}, \dots, \text{columna n} \right\}$$

$A_{:,1}$

4. Combinaciones lineales



Definición (Espacio Renglón). Sea A una matriz de $m \times n$. Al sub-espacio de $\mathbb{R}^n$, generado por los renglones de A , lo denotaremos por $\text{Renglón}(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{pmatrix} \quad \text{p.e.} \quad \text{Renglón}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{pmatrix} \right\}$$



Las operaciones elementales son combinaciones lineales particulares de renglones y como son reversibles, tenemos $\text{Renglón}(\text{FER}(A)) = \text{Renglón}(A)$. Más aún, los renglones de la FER distintos de cero forman una base, ya que son linealmente independientes y generan los renglones originales.

Ejemplo 5: Encuentre una base para el espacio $\text{Renglón}(A)$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Encontrar la FER y definir la base (y dimensión).

$$\begin{array}{l} R_2^N = R_2 - 2R_1 \\ R_3^N = R_3 + 3R_1 \\ R_4^N = R_4 - 4R_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 19 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & -21 \end{pmatrix}$$

$$R_4 / (-3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & -13 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_1^N = R_1 - R_4 \\ R_2^N = R_2 + 3R_4 \\ R_3^N = R_3 - 5R_4 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 / 2 \\ R_3 / -4 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$R_2^N = R_2 - R_3$
 + un cambio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2^N = R_2 - R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resultado: Solo cuentan los renglones distintos de cero, es decir, la base y el espacio renglón de este ejemplo son:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \text{Renglón}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subsetneq \mathbb{R}^5.$$

Por definición, el número de elementos de la base $\mathcal{B}$ es la dimensión del espacio. En este caso, la dimensión de $\text{Renglón}(A)$ es igual a $|\mathcal{B}| = 3$. Además, como en el ejemplo anterior podemos usar que los unos principales indican las columnas (originales) L.I, es decir, también hemos encontrado

$$\text{Col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subsetneq \mathbb{R}^4. \quad (4.1)$$

Lema 4.4 (importante). Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz con m renglones y n columnas y rango r , entonces el espacio $\text{Col}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$, el espacio $\text{Renglón}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ y

$$\dim(\text{Renglón}(A)) = r = \dim(\text{Col}(A)).$$

4. Combinaciones lineales

Demostración. La FER de A tiene r unos principales y contiene combinaciones lineales de renglones de A . Entonces, tiene r renglones distintos de cero que son linealmente independientes. Dado que los renglones originales son combinaciones lineales de estos renglones, cada renglón de A que fue convertido en cero en la FER (de A) es combinación lineal (no-trivial) de los r renglones L.I. Por cada tal renglón, Lema 4.1(b) permite escribir el conjunto generado sin ese renglón, es decir, se reduce el número de renglones en el conjunto generador a los r vectores L.I. Por lo tanto, esos renglones forman una base de $\text{Renglón}(A)$ y $\dim(\text{Renglón}(A)) = r$.

Por otro lado, los r unos principales identifican r columnas linealmente independientes y usar 1 como valor de una variable libre, permite escribir la columna asociada como combinación lineal (no-trivial) de las r columnas L.I. Entonces, Lema 4.1(b) permite escribir el conjunto generado sin esas columnas y solo quedan las r columnas L.I. en el conjunto generador. Por lo tanto, esas columnas forman una base de $\text{Col}(A)$ y $\dim(\text{Col}(A)) = r$. $\square$

Los dos ejemplos anteriores (4,5) mostraron como encontrar bases de $\text{Col}(A)$ y de $\text{Renglón}(A)$.

A veces el siguiente truco puede reducir el número de operaciones elementales.

Las columnas de A son los renglones de A^T , por lo cual

$$\text{Col}(A) = \text{Renglón}(A^T) \quad \text{y} \quad \text{Renglón}(A) = \text{Col}(A^T).$$

Ejemplo 6: Encuentre otra base para el espacio $\text{Col}(A)$ usando $\text{Renglón}(A^T) = \text{Col}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Encontrar la FER de A^T y definir la base (y dimensión).

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1 = R_1 - R_2 \\ R_3 = R_3 - 3R_2 \\ R_4 = R_4 - R_2 \\ R_5 = R_5 - 6R_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -11 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_3 = R_3 - R_1 \\ R_4/2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -11 & -3 \end{pmatrix}$$