

$$\begin{aligned} R_1' &= R_1 - 3R_4 \\ R_5' &= R_5 - 5R_4 \\ R_2' &= R_2 + R_4 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_5 &= R_5 + R_1 \\ R_4 &= R_4 + 2R_1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

"cambiar
renglones"

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \\ R_4 \\ R_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

Resultado: Hemos encontrado otra base que en (4.1) con la misma dimensión 3 :

$$\text{Col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subsetneq \mathbb{R}^4. \quad (4.2)$$

Más tarde usaremos Lema 4.1(b) para ver que los conjuntos en (4.1) y (4.2) son iguales.

4.3.2. Resultados generales e importantes

Lema 4.5 (Sistemas homogéneos). Si $[A|\vec{0}]$ es un sistema homogéneo de m ecuaciones con n variables, donde $m < n$, entonces el sistema tiene soluciones no-triviales.

Demostración. Dado que es un sistema homogéneo, este tiene al menos la solución trivial $\vec{0}$ y por lo tanto es consistente. Más aún, sabemos que $\text{rango}(A) = r \leq \min\{m, n\} = m$ ya que hay a lo más tantos unos principales como ecuaciones o variables (lo que sea menor). Sabemos que hay $n - r$ variables libres y con la hipótesis concluimos

$$\text{"\# de variables libres"} = n - r \geq n - m > 0,$$

es decir, el sistema tiene por lo menos una variable libre, la cual, si es distinta de cero, da soluciones no-triviales. $\square$

Ejemplos: Matrices (aumentadas) con variables libres (en páginas 102, 104, 105 y 109):

Ej. 2 P. 102

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Ej. 2 (pág. 104)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

Ej. 3 p. 105

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

ó

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{con } x_1, x_2, x_3, x_4} \vec{x}_{\text{nr}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los siguientes resultados son “teoremas” por su importancia, no por la complejidad de la prueba.

Ejemplos: El siguiente teorema dice que conjuntos con más elementos que una base son linealmente dependientes.

Ej. 2 (P. 102)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

genera $\mathbb{R}^2$, pero L.D.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ genera } \mathbb{R}^3 \text{ pero es L. D.}$$

Ej. 1 pág 104,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \right\}$$

una base de S es,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ pero } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ es L. D.}$$



Teorema 4.6. Sea $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ un (sub-)espacio vectorial con una base $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subset \mathcal{V}$ de $\mathcal{V}$. Si $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \in \mathcal{V}$ con $m > n$, entonces $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ es un conjunto lin. dependiente.

Demostración. Tenemos que ver si la siguiente ecuación tiene una solución no-trivial:

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_m \vec{u}_m = \vec{0}. \quad (\star)$$

Por hipótesis $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base de $\mathcal{V}$. Entonces cada elemento de $\mathcal{V}$ se puede escribir en combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$. Como $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \in \mathcal{V}$ podemos escribir sus elementos como sigue:

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_1 &= a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 + \dots + a_{1n}\vec{v}_n \\ \vec{u}_2 &= a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \dots + a_{2n}\vec{v}_n \\ &\vdots \\ \vec{u}_m &= a_{m1}\vec{v}_1 + a_{m2}\vec{v}_2 + \dots + a_{mn}\vec{v}_n \end{aligned} \right\} \quad (\star\star)$$

Al sustituir las ecuaciones del sistema $(\star\star)$ en la ecuación $(\star)$ obtenemos

$$\alpha_1(a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 + \dots + a_{1n}\vec{v}_n) + \alpha_2(a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \dots + a_{2n}\vec{v}_n) + \dots + \alpha_m(a_{m1}\vec{v}_1 + a_{m2}\vec{v}_2 + \dots + a_{mn}\vec{v}_n) = \vec{0}.$$

La definición 3.1 nos permite expandir los paréntesis (2b), multiplicar primero los escalares (2d), cambiar la posición de los vectores sumados (1d), evaluar primero las sumas asociados al vector $\vec{v}_i$ (1c) y factorizar los vectores $\vec{v}_i$ (2c). Como resultado la igualdad anterior da:

$$(\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_m a_{m1})\vec{v}_1 + (\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_m a_{m2})\vec{v}_2 + \dots + (\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \dots + \alpha_m a_{mn})\vec{v}_n = \vec{0}.$$

Dado que $\mathcal{B}$ es base, los vectores $\vec{v}_i$ son lin. independientes, entonces los coeficientes de la combinación lineal anterior deben ser cero. De este modo tenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_m a_{m1} &= 0 \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_m a_{m2} &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \dots + \alpha_m a_{mn} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Este sistema lineal homogéneo tiene n ecuaciones y $m > n$ variables. En estas condiciones, el lema 4.5 dice que existe una solución no-trivial para los $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, es decir, para la ecuación $(\star)$ existe una solución tal que $\alpha_i \neq 0$ para alguna $i \in \{1, \dots, m\}$. Entonces, por definición el conjunto de los vectores en $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ es linealmente dependiente, lo cual termina la prueba. $\square$

neg. del Teo. 4.2
ó def L.D.)

Teorema 4.7 (de la Base). Sea $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ un (sub-)espacio vectorial.

Si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}, \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subset \mathcal{V}$ son bases de $\mathcal{V}$, entonces $m = n$.

“Cualesquiera dos bases de un (sub-)espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.”

Demostración. Sean $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ & $\mathcal{C} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ dos bases de $\mathcal{V}$.

Necesitamos probar que $m = n$, lo haremos en forma indirecta suponiendo $m > n$ ó $m < n$.

Caso 1 ($m > n$): Dado que $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es base y $m > n$ el teorema 4.6 dice que cada conjunto con $m > n$ elementos es linealmente dependiente. Eso contradice que $\mathcal{C}$ es base.

Caso 2 ($m < n$): Dado que $\mathcal{C} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ es base y $n > m$ el teorema 4.6 dice que cada conjunto con $n > m$ elementos es linealmente dependiente. Eso contradice que $\mathcal{B}$ es base.

Negando los casos tenemos $m \leq n$ & $m \geq n$ lo cual da $m = n$ y termina la prueba. $\square$

Corolario 4.8. Sea $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ un (sub-)espacio vectorial con $\mathcal{V}$ de dimensión n . Entonces, cada conjunto linealmente independiente de n vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} \subset \mathcal{V}$ es una base de $\mathcal{V}$.

Ejemplo: Matrices distintas cuyas columnas son bases para $\mathbb{R}^4$:

Para subespacios no es la identidad, ej. $102 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo: Los resultados (4.1) y (4.2) muestran dos bases para $\text{Col}(A)$.

Usamos Lema 4.1(b) para mostrar igualdad entre los generados:

$$\text{span} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_3} \right\} \stackrel{(4.1)}{=} \text{Col}(A) \stackrel{(4.2)}{=} \text{span} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \right\} \subsetneq \mathbb{R}^4.$$

Lema 4.1b

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{\tilde{u}}_1, \vec{\tilde{u}}_2, \vec{\tilde{u}}_3 \right\}$$

$\vec{\tilde{u}}_1 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3$ $\vec{\tilde{u}}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$ $\vec{\tilde{u}}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 2\vec{v}_3$

$\vec{\tilde{v}}_1 = \frac{1}{2}(\vec{u}_2 + \vec{u}_3)$ $\vec{\tilde{v}}_2 = 2\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 - \frac{5}{2}\vec{u}_3$

$\vec{\tilde{v}}_3 = \vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 - \frac{3}{2}\vec{u}_3$

$\left[\vec{\tilde{u}}_1 \quad \vec{\tilde{u}}_2 \quad \vec{\tilde{u}}_3 \mid \vec{\tilde{v}}_1 \right]$

Lema 4.1b

$$= \text{Span} \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \}$$

Lema 4.9. Sea $(V, +, \cdot)$ un (sub-)espacio vectorial y sea $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subset V$ un conjunto de vectores linealmente independiente. Si $\vec{w} \in V$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\{\vec{w}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ es linealmente independiente.
- $\vec{w}$ no pertenece a $\text{span} \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$.

Demostración. Ejercicio. Ayuda: Usar definiciones y el teorema 4.2. □

Interpretación: El lema 4.9 nos dice que si $\vec{w} \in V$ no se puede poner en combinación lineal de un conjunto $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ lin. independiente, entonces $\{\vec{w}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ es L.I. Por lo tanto, el ~~teorema~~ **Lema** permite construir conjuntos L.I. más grandes. El siguiente teorema dice que este proceso termina cuando existe una base finita.

Ejemplo: La base canónica (y algo más) en $\mathbb{R}^4$:

L.I.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{Lema 4.9}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

L.I. L.I. L.I.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{w} \end{array}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{w} \end{array}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Base

$\mathbb{R}^4$

θ

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 \end{pmatrix}$

Teorema 4.10. Sea $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ un (sub-)espacio vectorial de dimensión n . Si $p < n$ y el conjunto $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subset \mathcal{V}$ es lin. independiente, entonces se pueden encontrar $n - p$ vectores $\vec{v}_{p+1}, \vec{v}_{p+2}, \dots, \vec{v}_n \in \mathcal{V}$ tales que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base de $\mathcal{V}$.

Interpretación: Cualquier conjunto lin. indep. se puede extender a una base.

Demostración. Sea n la dimensión de $\mathcal{V}$ y $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ un conjunto lin. independiente.

Si $p = n$, entonces por el corolario 4.8 el conjunto $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ ya es base.

Si $p < n$, entonces $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subsetneq \mathcal{V}$ ya que la dimensión de $\mathcal{V}$ es n , lo cual (por definición 4.5) dice que una base tiene n elementos. Por lo mismo, existe un elemento $\vec{v}_{p+1} \in \mathcal{V}$ que no pertenece al espacio $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$. Es decir $\vec{v}_{p+1} \notin \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ y por la equivalencia en lema 4.9 el conjunto $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}\}$ también es L.I. Si $p+1 < n$, entonces podemos repetir este mismo razonamiento y obtener un elemento $\vec{v}_{p+2} \notin \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}\}$ aplicar la equivalencia del lema 4.9 para obtener que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \vec{v}_{p+2}\}$ es L.I. Esto se continua hasta obtener un conjunto de $p + (n - p)$ elementos L.I., es decir hasta obtener que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ es L.I. y por lo tanto es base por el corolario 4.8. $\square$

Nota: Si tenemos un sub-espacio vectorial $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ de un espacio vectorial $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ y una base $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ de $\mathcal{S}$, entonces el teorema 4.10 permite completar esta base a una base de $\mathcal{V}$, digamos $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ donde $n > p$ es la dimensión de $\mathcal{V}$.

Ejemplo: Si unimos las bases de $\text{Renglón}(A)$ & $\text{Null}(A)$ tenemos una base de $\mathbb{R}^n$:

Ej. 4 (pág. 106)

$$\text{Renglón}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Null}(A) &= \mathcal{L}_s = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ej. 2 (pág. 104)

$$\text{Null}([1, 3, -5]) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

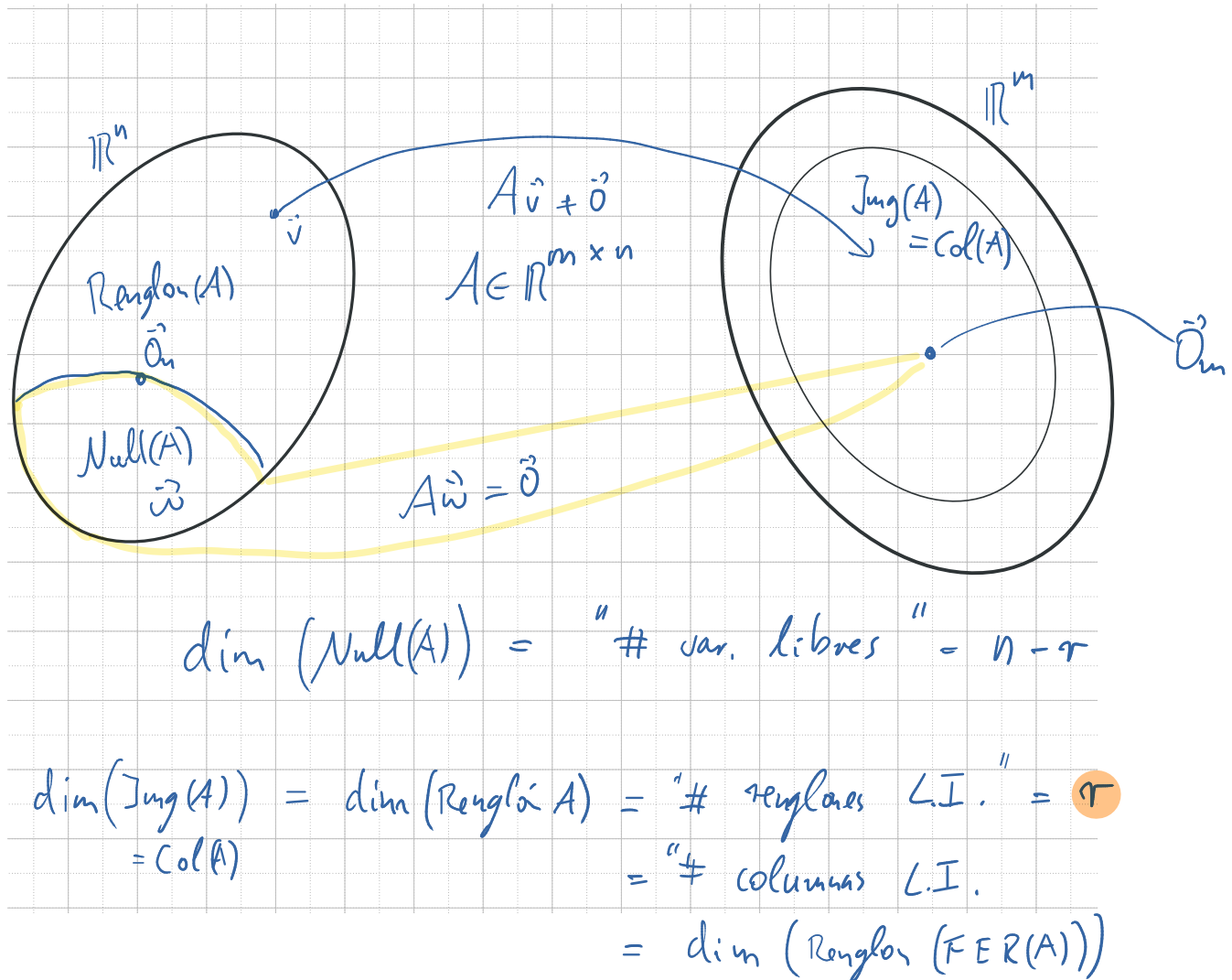
$$\text{Null}(A) = \{ \vec{x} \text{ t.q. } A\vec{x} = 0 \}$$

$$\text{renglón}([1, 3, -5]) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

4.4. Resumen y un “mind map”

De los recientes dos temas, los siguientes hechos son de gran utilidad para seguir entendiendo:

Hacemos primero un dibujo para ubicar espacios asociados a matrices que hemos introducido.



Consecuencias :

- “La negación” del teorema 4.2:

Los vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ son linealmente dependientes si y solo si la siguiente ecuación tiene soluciones no-triviales: $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$.

(Una solución no-trivial es distinta de la solución cero.)

- Por el teorema 4.2 tenemos: Columnas LI. $\iff [A|\vec{0}] = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n|\vec{0}]$ tiene solución única $\iff \text{FER}(A)$ tiene n unos principales $\iff$ rango de A es n . Eso requiere $m \geq n$ ya que $n = r$ y $r \leq \min\{m, n\}$, es decir, “el sistema no tiene más variables que ecuaciones.”
- Un sistema no homogéneo (con lado derecho $\vec{b} \neq \vec{0}$) siempre tiene solución si existen tantos unos principales como ecuaciones, es decir, cuando $m = r \leq \min\{m, n\}$ lo cual permite variables libres y a la vez excluye renglones lin. dependientes.

Espacios de matrices:

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz de m renglones y n columnas, entonces

- Su rango r es el número de unos principales en la FER de A
- La imagen de A son los puntos en $\mathbb{R}^m$ que se alcanzan como combinaciones lineales de columnas de A y se escribe de las tres siguientes formas:

$$\text{Img}(A) = \text{Col}(A) = \text{span} \{A_{:1}, A_{:2}, \dots, A_{:n}\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

- Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B = \text{FER}(A) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Los r renglones de B distintas de cero forman una base de $\text{Renglón}(A) = \text{Renglón}(B) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Los r unos principales en B identifican r columnas lin. independientes de A que forman una base de $\text{Img}(A) = \text{Col}(A)$ con $r \leq n$ columnas, donde Lema 4.1(b) confirma la igualdad entre los conjuntos generados “span”.

- Las dimensiones de su espacio renglón y columna son iguales al rango, *i.e.*

$$\dim(\text{Img}(A)) = \dim(\text{Col}(A)) = r = \dim(\text{Renglón}(A)).$$

Interpretaciones: “# columnas lin. indep.”, “# unos principales”, “# renglones lin. indep.”

- El espacio nulo $\text{Null}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de todas las soluciones del sistema $A\vec{x} = \vec{0}$. Su dimensión es igual al “número de variables libres”, *i.e.*

$$\dim(\text{Null}(A)) = n - r.$$

Interpretaciones alternativas: “# direcciones lin. indep. cuyo producto punto con renglones de A es cero”, “# columnas lin. dep. de A ” y “# columnas de la $\text{FER}(A)$ que NO contienen un uno principal”.

La formula de la dimensión:

$$n = \dim(\text{Img}(A)) + \dim(\text{Null}(A)) \quad (4.3)$$

Formas alternativas: Interpretaciones de dimensiones se encuentran arriba.

$$n = \dim(\text{Col}(A)) + \dim(\text{Null}(A))$$

$$= (r) + (n - r)$$

$$= \dim(\text{Renglón}(A)) + \dim(\text{Null}(A)).$$