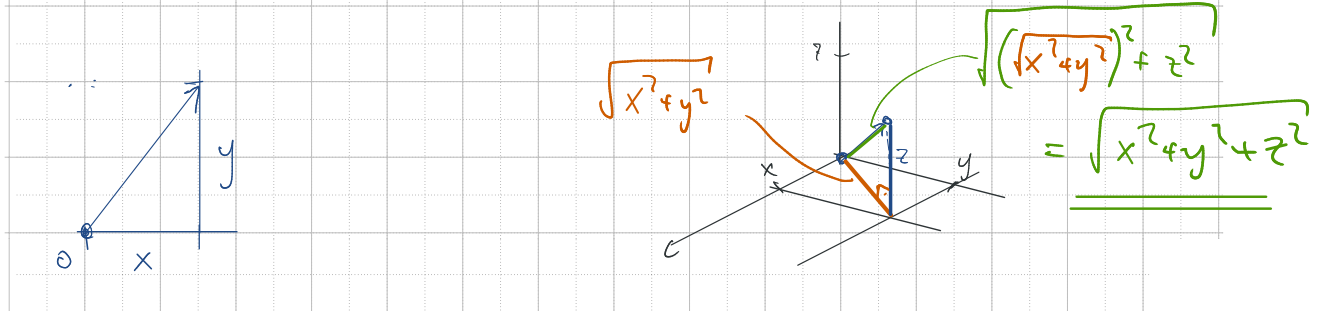


La longitud euclidiana de vectores (norma euclidiana)

La longitud euclidiana de un vector en $\mathbb{R}^n$ generaliza el teorema de Pythagoras, por ejemplo:

Para un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mide la hipotenusa del triángulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, i.e. $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Para un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mide la hipotenusa del triángulo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, i.e. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



Definición 7.3. Longitud del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ es su **norma euclidiana** definida por

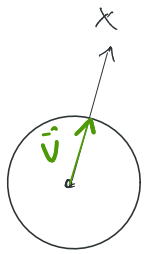
$$\|\vec{u}\|_e = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} \geq 0.$$

Interpretación: La longitud del vector $\vec{u}$ es $\|\vec{u}\|_e$.

Una propiedad importante:

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, entonces se puede **normalizar** es decir, $\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{u}\|_e} \vec{u}$ tiene longitud 1, es decir, $\|\vec{v}\|_e = 1$.

Justificamos.



Sea $\alpha = \frac{1}{\|\vec{u}\|_e} > 0$ definido y positivo por $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Entonces $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ tiene la norma

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|_e &= \sqrt{(\alpha u_1)^2 + (\alpha u_2)^2 + \dots + (\alpha u_n)^2} = \sqrt{\alpha^2 (u_1^2 + \dots + u_n^2)} \\ &= \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|_e = \frac{1}{\|\vec{u}\|_e} \|\vec{u}\|_e = 1 \end{aligned}$$

El siguiente teorema es importantísimo en aplicaciones, probabilidad, optimización, ...

Teorema 7.16. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz real simétrica, entonces sus eigenvalores son reales (posiblemente iguales) y $\mathbb{R}^n$ tiene una base de eigenvectores de A . Es decir, $AV = V\Lambda$ donde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y las columnas de V son eigenvectores de A .

Además, $V^T V$ es una matriz diagonal y V se puede normalizar tal que $V^T V = I$.

Demostración. Esta prueba queda afuera de nuestro alcance. Ver Álgebra lineal 2. □

Ejemplo: Diagonaliza la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \therefore \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &\stackrel{(i-1)}{=} (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} + 0 + 0 \\ &= (2-\lambda) \cdot [(5-\lambda)^2 - 1] \\ &= (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 10\lambda + 24) \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{5^2 - 24} = 5 \pm 1 \in \{4, 6\}$$

Eigenvectors:

$$E_2(A) = \text{Null}(A - 2I) = \text{Null} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$E_4(A) = \text{Null}(A - 4I) = \text{Null} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$E_6(A) = \text{Null}(A - 6I) = \text{Null} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\therefore V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AV = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad V^T V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \therefore W^T W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Transformaciones Lineales

Este material fue tomado del libro de los profesores Mota & Rumbo y de las notas del Prof. John Truss.

Cuando se define una función entre espacios vectoriales, no solo interesa enviar vectores de un espacio a otro, sino también nos interesa preservar estructura.



Las transformaciones lineales entre espacios vectoriales se definen como sigue:



Definición 8.1. Sean $(V, +, *_{esc})$ de dim. n & $(W, +, *_{esc})$ de dim. m dos espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{R}$. Una función $T: V \rightarrow W$ es una **Transformación lineal** si cumple:

1. $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$,

2. $T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$.

Nota: de la definición anterior se sigue que:

$$T(r\vec{u} + s\vec{v}) \stackrel{1.)}{=} T(r\vec{u}) + T(s\vec{v}) \stackrel{2.)}{=} rT(\vec{u}) + sT(\vec{v}),$$

$\underbrace{r\vec{u}}_{\in V} \quad \underbrace{s\vec{v}}_{\in V}$

Ejemplo 1: Sea $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(x) = 8x$. Demuestre que es una transformación lineal.

1) sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$T(x+y) = 8(x+y) = 8x + 8y = T(x) + T(y)$$

2) sean $\gamma \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$T(\gamma x) = 8(\gamma x) = \gamma(8x) = \gamma T(x)$$

8. Transformaciones Lineales

Ejemplo 2: Demuestre que $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$ es una transformación lineal.

Sea $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$T(\gamma \vec{u}) = T\left(\begin{pmatrix} \gamma x \\ \gamma y \\ \gamma z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \gamma x + 3(\gamma y) \\ \gamma y - 2(\gamma z) \end{pmatrix} \stackrel{\text{en } \mathbb{R}}{=} \begin{pmatrix} \gamma(x + 3y) \\ \gamma(y - 2z) \end{pmatrix}$$

mult. esc. vec.

$$= \gamma \begin{pmatrix} x + 3y \\ y - 2z \end{pmatrix} = \gamma T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \quad \therefore 2)$$

Sea $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, entonces

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\left(\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+a + 3(y+b) \\ y+b - 2(z+c) \end{pmatrix} \stackrel{\text{en } \mathbb{R}}{=} \begin{pmatrix} x+3y + a+3b \\ y-2z + b-2c \end{pmatrix}$$

Suma en $\mathbb{R}^3$

$$\stackrel{\text{Suma de vect.}}{=} \begin{pmatrix} x+3y \\ y-2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+3b \\ b-2c \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$$

Ejemplo 3: La diferenciación nos da una transformación lineal entre el espacio de polinomios de grado n y $n-1$, con la suma y la multiplicación por escalar $(P_n, +, *_{esc})$ y $(P_{n-1}, +, *_{esc})$.

Necesitamos que el operador derivada $\frac{\partial}{\partial x} : P_n \rightarrow P_{n-1}$ cumpla las condiciones de def. 8.1.

i) Sean $p(x), q(x) \in P_n[x]$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x} (p(x) + q(x)) = \frac{\partial}{\partial x} p(x) + \frac{\partial}{\partial x} q(x)$$

calc.

ii) $\frac{\partial}{\partial x} (c p(x)) = c \cdot \frac{\partial}{\partial x} p(x)$

Ejemplo 4: Compruebe que $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 2x-y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$ es una transformación lineal.

Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\left(\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ 2(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \\ 3(u_1 + v_1) + 4(u_2 + v_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_1 - u_2 \\ 3u_1 + 4u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 - v_2 \\ 3v_1 + 4v_2 \end{pmatrix}$$

$$= T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

Sea $\gamma \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$
entonces

$$T(\gamma \vec{u}) \stackrel{*esc.}{=} T\left(\begin{pmatrix} \gamma u_1 \\ \gamma u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \gamma u_1 \\ 2\gamma u_1 - \gamma u_2 \\ 3\gamma u_1 + 4\gamma u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma u_1 \\ \gamma(2u_1 - u_2) \\ \gamma(3u_1 + 4u_2) \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{*esc.}{=} \gamma \begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_1 - u_2 \\ 3u_1 + 4u_2 \end{pmatrix} \stackrel{\gamma \text{ def. de } T}{=} \gamma T(\vec{u})$$

Lema 8.1. Sea A una matriz de $m \times n$, entonces la función $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal.

Demostración.

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$T(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x} + \vec{y}) \stackrel{\text{Teo. 2.2}}{=} A\vec{x} + A\vec{y} = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$$

Sea $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$T(\gamma \vec{x}) = A(\gamma \vec{x}) \stackrel{\text{Teo. 2.3}}{=} \gamma(A\vec{x}) = \gamma T(\vec{x})$$

8. Transformaciones Lineales

Interpretación: El lema anterior nos dice que cada matriz determina una transformación lineal.

A continuación veremos que la converso a este lema también es válido. Para desarrollar la demostración ocuparemos la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n\end{aligned}$$

 **Lema 8.2.** Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, donde A está dada por

$$A = \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \dots & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix}.$$

y se conoce como la **matriz estándar** debido a que $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es la base **estándar** de $\mathbb{R}^n$.

Demostración.

$$\begin{aligned}T(\vec{x}) &= T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = T(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) \\ &\stackrel{\text{Def. 8.1.1}}{=} T(x_1 \vec{e}_1) + T(x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) \\ &= T(x_1 \vec{e}_1) + T(x_2 \vec{e}_2) + \dots + T(x_n \vec{e}_n) \\ &\stackrel{\text{Def. 8.1.2}}{=} x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \dots + x_n T(\vec{e}_n) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \dots & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix}}_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= A \vec{x}\end{aligned}$$

como se requería.

