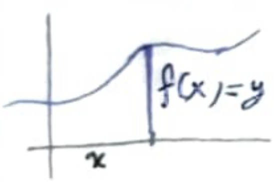
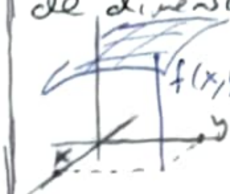
CÁLCULO VECTORIAL (2026)

---

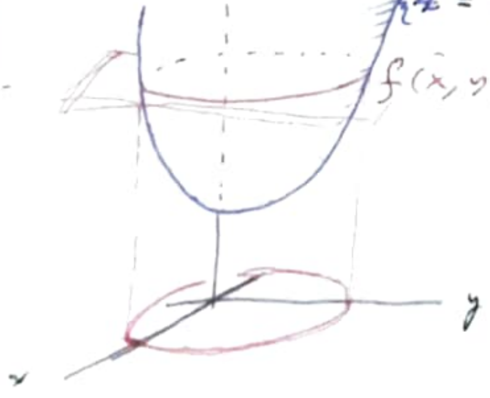
§1: INTRODUCCIÓN

Cálculo vectorial es una parte de cálculo multi-variable. Nuestro tema principal será extender nociones familiares de cálculo en 1-variable a varias variables:

1-variable	Multi-variable
$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x)$	$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\vec{f}} \mathbb{R}^n$ $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \longmapsto (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})) = \vec{f}(\vec{x})$
geometría (local) de curvas en el plano ($\mathbb{R}^2$) (1-dimensión) $\subset$ (2-dimensión) a saber las curvas gráficas	geometría (local) de m-dimensión 'superficies' en espacio dimensión $n+m$ ($\mathbb{R}^{n+m}$). [A saber, las variedades gráficas de dimensión m en $\mathbb{R}^{m+n}$].
 $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$	 $\{(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) : \vec{x} \in \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^{m+n}$

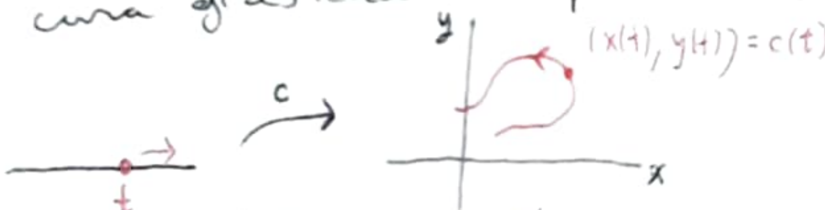
Ejemplos:

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ tiene gráfica una superficie en espacio ($\mathbb{R}^3$). Alternativamente, sus conjuntos niveles son en general curvas (implícitas) planas:

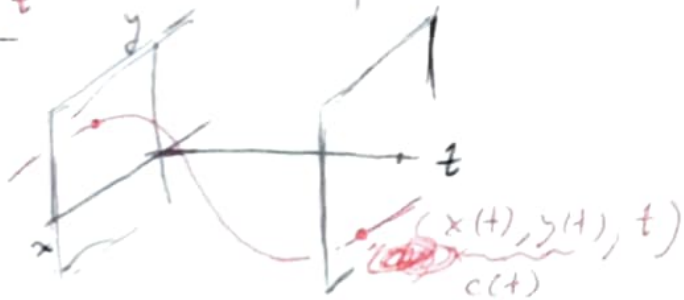


2) $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto c(t) = (x(t), y(t))$

Visualisamos en general por una curva planar parametrizada, alternativamente por su 'levantamiento' o 'world-line' como una curva gráfical en espacio ($\mathbb{R}^3$):

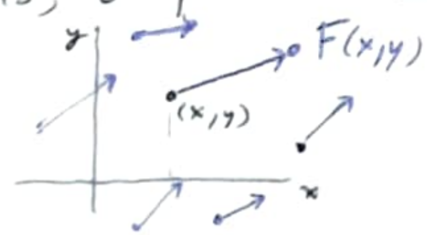


ó:



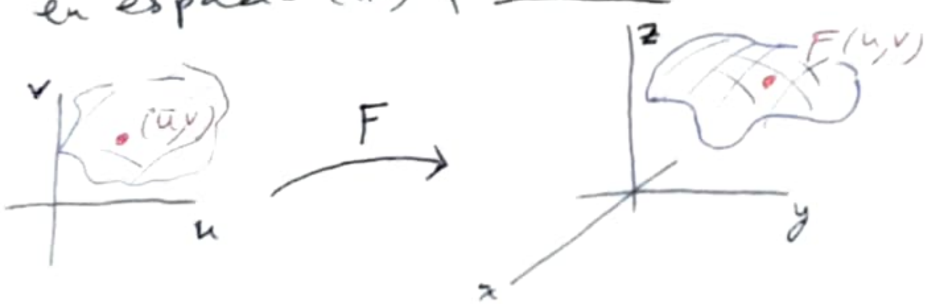
3) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; (x,y) \longmapsto (f(x,y), g(x,y)) = F(x,y)$

tiene gráfica algún superficie (dim. 2) en $\mathbb{R}^4$, que ya no podemos dibujar. Para visualizarlo, podemos interpretarlo como un transformación del plano al plano, o por un campo vectorial sobre el plano:



4) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \; (u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = F(u,v)$

interpretamos mas visualmente como un superficie (dim. 2) en espacio ($\mathbb{R}^3$) parametrizado:



¿Cada $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametriza algún superficie?

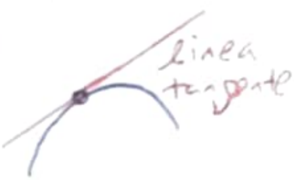
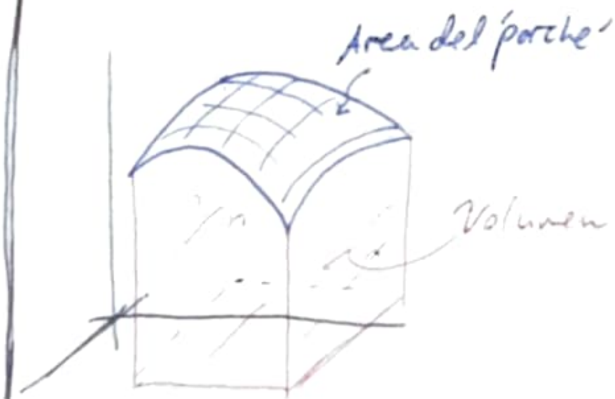
Geometría en dimensiones superior no es solamente un curiosidad matematical. A menudo en aplicaciones concretas tenemos que considerar o analizar funciones de varias variables, ya que en la practica podríamos estar considerando las inter-relaciones (funciones) entre gran numero de cantidades. Por ejemplo:

(*) La fuerza gravitacional sobre una masa puntual m depende de las posiciones relativas y masas de las varios objetos influyendo tal punto m.

(*) el precio de algún bien, valor de algún inversion,...

Las ideas básicas de cálculo en tal aplicaciones (aproximación, promedio,...) entonces son bien útil.

Un poco más preciso consideremos los siguientes temas:

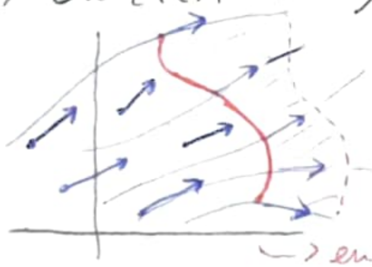
	1-variable	multi-variable
Cálculo Diferencial (aproximación)	 $f(x+h) - f(x) = \frac{df}{dx} \cdot h + R$	 $f(x+h, y+k) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k + R$
Cálculo Integral (longitud, area, volumen, ...)		

Y nuestro objectivo final sería la generalización del Teorema fondamental de cálculo

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\,dx = f(x_1) - f(x_0)$$

a dimensiones superiores. Tales generalizaciones tratan "integrales de flujo" [integral linea/superficie] y ciertos "operadores vectorial" [divergencia, rotacional, gradiente].

Como ejemplo de "integral de flujo" considera un campo vectorial planar representando las velocidades instantoneas en que algún fluido esta esparciendo sobre el plano. Fijando atención en algún curva planar podemos preguntar con que tasa el fluido esta pasando por esta curva; eso sería dado por un cierto "integral de flujo" (flux) sobre la curva:



→ en tiempo 't' un cierto cantidad del 'fluido' pasara por la curva, que podemos medir con un integral de flujo.

---

§ 2 : Geometría en espacio Euclideano dim. n ($\mathbb{R}^n$)

Principalmente consideramos $n=2$ (plano; $\mathbb{R}^2$) o $n=3$ (espacio; $\mathbb{R}^3$).

Tipicamente trabajamos con unos coordenadas Cartesianas: $\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n)$