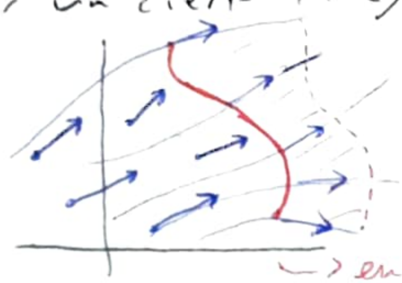
Y nuestro objectivo final sería la generalización del Teorema fundamental de cálculo

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\,dx = f(x_1) - f(x_0)$$

a dimensiones superiores. Tales generalizaciones tratan "integrales de flujo" [integral linea/superficie] y ciertos "operadores vectorial" [divergencia, rotacional, gradiente].

Como ejemplo de "integral de flujo" considera un campo vectorial planar representando las velocidades instantaneas en que algún fluido esta esparciendo sobre el plano. Fijando atención en algún curva planar podemos preguntar con que tasa el fluido esta pasando por esta curva; eso sería dado por un cierto "integral de flujo" (flux) sobre la curva:



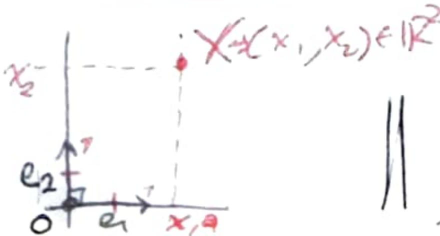
⟶ en tiempo 't' un cierto cantidad del 'fluido' pasara por la curva, que podemos medir con un integral de flujo.

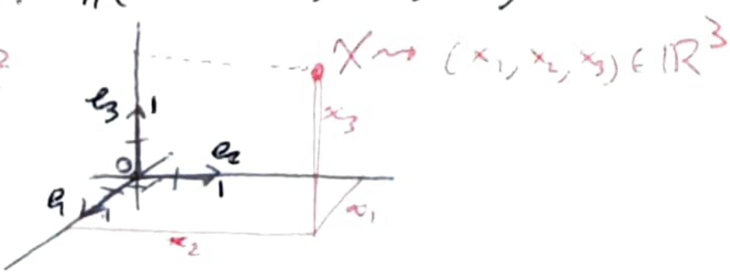
---

§ 2: Geometría en espacio Euclideano dim. n ($\mathbb{R}^n$)

Principalmente consideramos $n=2$ (plano; $\mathbb{R}^2$) o $n=3$ (espacio; $\mathbb{R}^3$).

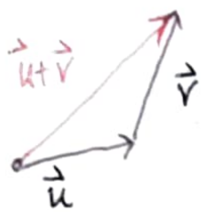
Tipicamente trabajamos con unas coordenadas Cartesianas: $\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n)$



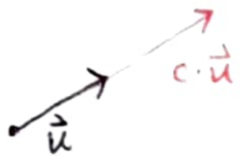


En esta sección, nuestros puntos principales serían:

1) vectores y su estructura vectorial [álgebra lineal]



$$\underbrace{(u_1,\dots,u_n)}_{\vec{u}} + \underbrace{(v_1,\dots,v_n)}_{\vec{v}} := \underbrace{(u_1+v_1,\dots,u_n+v_n)}_{\vec{u}+\vec{v}}$$



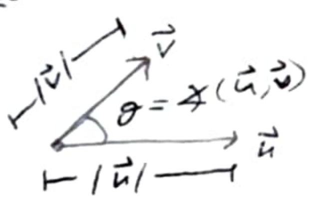
$$c\overbrace{(u_1,\dots,u_n)}^{\vec{u}} := (cu_1,\dots,cu_n) =: c\vec{u}$$

$[c\in\mathbb{R},\ \vec{u}\in\mathbb{R}^n]$.

2) producto escalar : $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\vec{u},\vec{v}) \longmapsto \vec{u}\cdot\vec{v}\in\mathbb{R}$$

$$\overbrace{(u_1,\dots,u_n)}^{\vec{u}}\cdot\overbrace{(v_1,\dots,v_n)}^{\vec{v}} := u_1v_1+\dots+u_nv_n = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

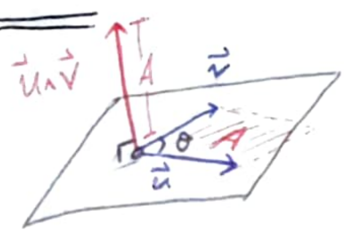


; $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta}$

3) producto vectorial [en dimensión 3] : $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\vec{u},\vec{v}) \longmapsto \vec{u}\wedge\vec{v}$$

$$\overbrace{(u_1,u_2,u_3)}^{\vec{u}}\wedge\overbrace{(v_1,v_2,v_3)}^{\vec{v}} := (u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1) = \vec{u}\wedge\vec{v}$$



; $\boxed{|\vec{u}\wedge\vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\sin\theta|}$

* orientación con 'regla de mano derecha' *

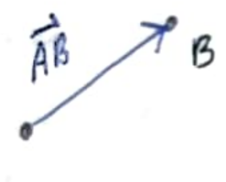
4) n-volumen: $\vec{u}_1\wedge\dots\wedge\vec{u}_n := \det\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,n}\end{pmatrix}$.

$[\vec{u}_j = (u_{j,1},\dots,u_{j,n})\in\mathbb{R}^n]$.

Vectores:

Un par de puntos (ordenados) determina un segmento orientado, o un **vector atado**:

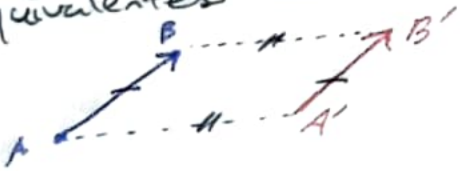
$A, B \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow$



También llamamos un vector de A á B, con el punto BASE en A, ó decimos vector aplicado en el punto A.

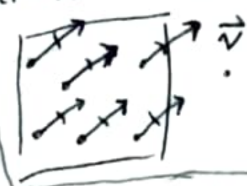
Un **vector LIBRE** (o solo un VECTOR) sería un vector atado sin punto base distinguido.

Más preciso, consideramos dos vectores atados equivalentes con nuestro concepto de parallelismo:



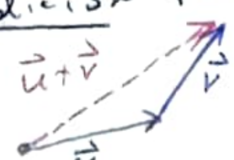
$\vec{AB} \equiv \vec{A'B'}$ presentan mismo vector (llibre).

Se puede visualizar vector (libre) por cualquier representativo vector atado, o tambien como un 'desplazamiento' distribuido uniformemente sobre el plano (o espacio):



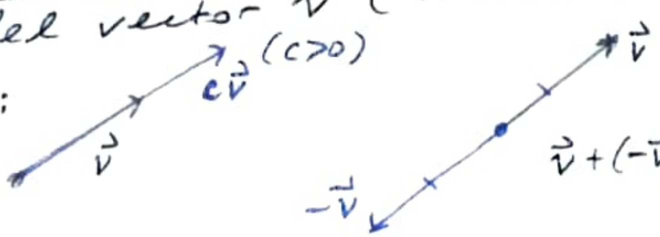
Los vectores (libres, o, desplazamientos) tienen estructura de espacio vectorial en considera

adición por composición de sus desplazamientos:



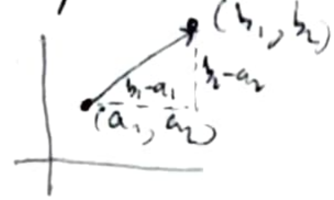
('regla paralelogramo')

y con escalamientos por $c \in \mathbb{R}$ en re-escalar el longitud del vector $\vec{v}$ (cuando $c<0$ re-escalamos $-\vec{v}$ por $|c|$):



$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \; (\equiv \vec{AA})$.

En coordenadas cartesianas sobre $\mathbb{R}^n$ un vector atado sería determinado por los dos puntos (ordenados)



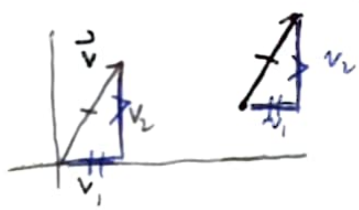
$A=(a_1,\dots,a_n)$, $B=(b_1,\dots,b_n)$

eso es con 2·n numeros.

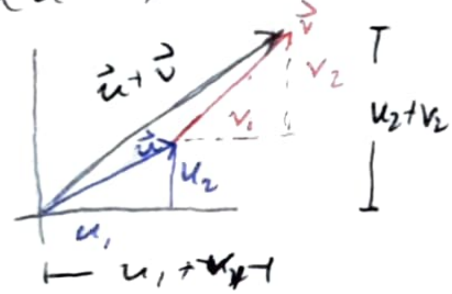
Un vector libre (o desplazamiento) sería determinado por sus componentes:

$$\vec{v}=(v_1,\dots,v_n)\equiv \overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\, b_2-a_2,\dots,b_n-a_n)$$

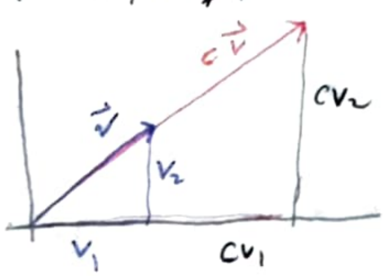
eso es con n numeros:



En coordenadas, las operaciones de adición y escalamiento tienen las formulas de arriba:



$$(u_1,\dots,u_n)+(v_1,\dots,v_n):=(u_1+v_1,\dots,u_n+v_n)$$



$$c\cdot(v_1,\dots,v_n):=(cv_1,\dots,cv_n)$$

(triangulos similares).

Con las formulas analíticas, es facil verificar que los vectores en espacio n-dim. ($\mathbb{R}^n$) forman un espacio vectorial; eso es que satisfacen las AXIOMAS para un espacio vectorial:

Def. Digamos un conjunto V es un espacio vectorial sobre los reales, $\mathbb{R}$, cuando cumple con los siguientes axiomas:

(V0) hay operaciones:

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad (\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v}$$

$$\text{`}\cdot\text{'} : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \qquad (c, \vec{v}) \longmapsto c \cdot \vec{v}$$

tal que:

(V1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

(V2) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(V3) $\exists\, \vec{0} \in V$ tal que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$

(V4) $\forall \vec{v} \in V$, $\exists -\vec{v} \in V$ tal que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

(V5) $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in V$.

(V6) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

(V7) $c \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = c \cdot \vec{u} + c \cdot \vec{v} \quad \forall c \in \mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v} \in V$

(V8) $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in V$.

También llamamos tal V, un espacio vectorial real.

Lo más eficiente manera axiomatizar nuestras nociones basicos de geometría (p.ej: parallelismo/translación) rigorosamente (igual en dimensiones arbitrarias) es con las axiomas del espacios vectoriales y su realización con las formulas analitical arriba en coordenadas (Cartesianas) sobre $\mathbb{R}^n$.

Recordamos unos relevantes nociones de algebra lineal: "span" o "combinación lineal" y dimensión:

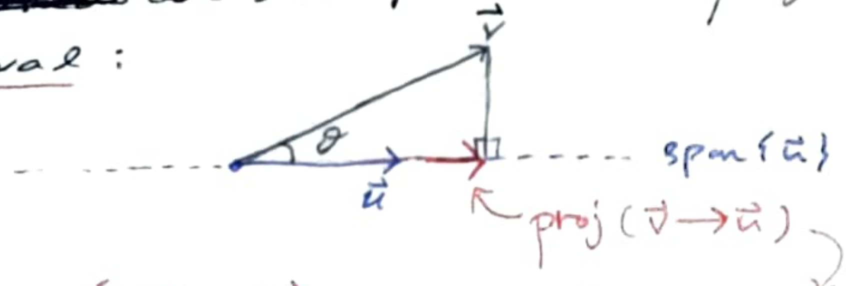
1) un colección $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ de vectores 'genera' o "span" el subespacio:

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} = \{c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k : c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\} \subset V$$

que consiste de todos combinaciones lineales de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. Por ejemplo:

2) dimensión: $\dim V = \min\{k : V = \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}\}$

Producto Escalar: Ahora consideramos mas formalmente los propiedades claves del producto escalar, que ~~relacione~~ con nuestros nociones en geometría del ángulo y longitud. Son relacionada con la operación de proyección ortogonal:



dado por: $$\left(\frac{|\vec{v}|\cos\theta}{|\vec{u}|}\right)\vec{u} = \left(\frac{|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}$$

donde $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ denota longitudes de los vectores.

Para justificar nuestro formula geometrical:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$, consideramos las siguientes.

Propiedades:

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

2) $(c\vec{u})\cdot\vec{v} = c(\vec{u}\cdot\vec{v})$

3) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

La simetría (1) de nuestro formula geometrical es claro: $|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta$.

La linealidad con escalamientos vemos con los triangulos similares:

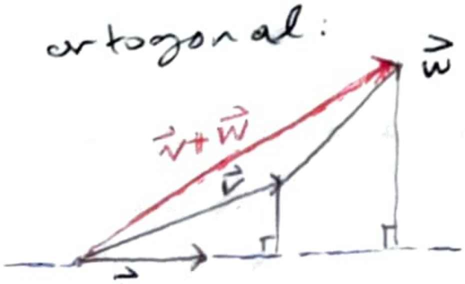
$\Rightarrow \mathrm{proj}(c\vec{v}\to\vec{u}) = c\,\mathrm{proj}(\vec{v}\to\vec{u})$

$$\Rightarrow \left(\frac{(c\vec{v})\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u} = \mathrm{proj}(c\vec{v}\to\vec{u}) = c\,\mathrm{proj}(\vec{v}\to\vec{u}) = c\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$$

$$\Rightarrow [(c\vec{v})\cdot\vec{u}]\vec{U} = [c(\vec{v}\cdot\vec{u})]\vec{U} \quad \left(\text{para } \vec{U} = \frac{\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)$$

$\Rightarrow (c\vec{v})\cdot\vec{u} = c(\vec{v}\cdot\vec{u})$; que establece (2).

La linealidad con adición (3) podemos ver en el plano facilmente con linealidad de proyección ortogonal:



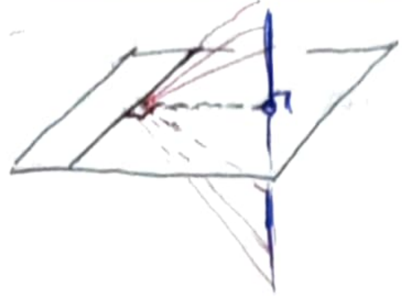
$\Rightarrow \mathrm{proj}((\vec{v}+\vec{w})\to\vec{u}) = \mathrm{proj}(\vec{v}\to\vec{u}) + \mathrm{proj}(\vec{w}\to\vec{u})$

$\Rightarrow$ (3) en la misma manera que hicimos (2).

Para extender (3) al configuraciones típico en espacio, es suficiente mostrar que:

$\mathrm{proj}((\vec{v}+\vec{n})\to\vec{u}) = \mathrm{proj}(\vec{v}\to\vec{u})$ para $\vec{n}$ algún vector normal al plano span$\{\vec{u},\vec{v}\}$, eso sigue

de la figura:
considerar



También de nuestra formula geométrica, notamos:

(*) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$; y $\vec{u}\neq 0, \vec{v}\neq 0 \iff \vec{u}\perp\vec{v}$ $(\theta = \frac{\pi}{2})$

(*) $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$.

Ahora nuestra formula analitica sigue de las propiedades (1), (2), (3) arriba, p. ej. en el plano:

$\vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 \longleftrightarrow (u_1, u_2)$

$\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 \longleftrightarrow (v_1, v_2)$

$$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1e_1+u_2e_2)\cdot(v_1e_1+v_2e_2)$$

$$= u_1v_1(e_1\cdot e_1) + [u_1v_2+u_2v_1]e_1\cdot e_2 + (u_2v_2)\, e_2\cdot e_2$$

$$= u_1v_1 + u_2v_2$$

las ejes son dirigidos por vectores ortonormales [$e_1\cdot e_1 = 1$, $e_2\cdot e_2=1$, $e_1\cdot e_2 = 0$].

Notamos que la noción de longitud es incluyida con el producto escalar, y su formula (PITAGORAS):

$$|\vec{u}| := \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{(u_1)^2+(u_2)^2+\dots+(u_n)^2}$$

en coordenadas Cartesianas [tambien se dice la Norma de $\vec{u}$]

Igual que las axiomas de espacio vectorial formalizan nuestras ideas de paralelismo, el más eficiente manera formalizar nuestras ideas sobre longitud y ángulo (geometría Euclideana) son:

Def. Un espacio vectorial real, V, tiene un producto escalar (ō producto interno) cuando:

(P0) hay un operación:

$$\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{u},\vec{v}) \longmapsto \vec{u}\cdot\vec{v}$$

tal que:

(P1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$, $\forall \vec{u},\vec{v} \in V$.

(P2) $(c\vec{u})\cdot\vec{v} = c(\vec{u}\cdot\vec{v})$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $\vec{u},\vec{v} \in V$.

(P3) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$, $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$.

(P4)* $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0$, y $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = 0$.

También decimos tus espacio vectorial tiene una estructura Euclideana.

Un operación con (P1)—(P3) se llama tambien una forma bilineal simetrica sobre V, con la condición (P4) tambien decimos tal forma bilineal es definitiva positiva.

Vemos que en coordenadas Cartesianas, nuestro formula analitica para $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en $\mathbb{R}^n$ realiza esas axiomas (definicion).

Dado estructura Euclideana ($\cdot$) sobre V, tenemos NORMAS (o "longitudes" o "magnitudes") de vectores por:

$$|\cdot| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \vec{u} \longmapsto |\vec{u}| := \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

Comentario: Nociones de "longitud" se axiomatizan con la definición de un espacio vectorial con una Norma:

(N1) $|\vec{v}| \geq 0 \ \forall \vec{v} \in V$, y $|\vec{v}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$.

(N2) $|c\vec{v}| = |c|\,|\vec{v}| \quad \forall c \in \mathbb{R}, \vec{v} \in V$.

(N3) $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|, \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$.

Cada espacio Euclideano tiene su norma inducida por su asociado producto escalar ($|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$).
La noción de solo longitud (espacio vectorial con Norma) es mas debil que longitud y angulo en el sentido que no cada Norma en un espacio vectorial esta inducida por algún producto escalar (o interior). P.ej.

$$\|(u_1, u_2)\|_4 := \left((u_1)^4 + (u_2)^4 \right)^{1/4}.$$

Resulta que una Norma en un espacio vectorial esta inducida por algún producto escalar si y solo si se cumple la siguiente "identidad del paralelogramo"

$$(*) \quad |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}\left(|\vec{u}+\vec{v}|^2 + |\vec{u}-\vec{v}|^2 \right), \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

Una NORMA que satisface también (*) sería inducida por el producto escalar:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} := \frac{1}{2}\left(|\vec{u}+\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 \right).$$

Producto Vectorial: Ahora consideramos más formalmente nuestras nociones geométricas de area, volumen, y orientaciones, para justificar nuestros formulas para producto vectorial y determinantes.

Primer, para orientaciones, recordamos que una base para un espacio vectorial V de dimensión n es un colección de vectores (lin. indep.) $b_1, \ldots, b_n \in V$ tq. $V = \text{span}\{b_1, \ldots, b_n\}$, y el base esta ordenado cuando tenemos un orden especificado de sus elementos $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$\nwarrow$ 1er $\nwarrow$ 2'do... $\nwarrow$ n'ma.

Def.: Dos bases (ordenados), $(b_1, \ldots, b_n)$ y $(B_1, \ldots, B_n)$ de V tienen o inducen la misma orientación de V cuando existe sendero continuo:

$$(b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t)), \quad t \in [0,1]$$

de bases de V tal que $b_j(0) = b_j$ y $b_j(1) = B_j$.

También decimos los dos bases son comunmente orientados. Si no existe tal sendero 'deformando' el base $(b_1, \ldots, b_n)$ a $(B_1, \ldots, B_n)$ (eso es los bases no tienen la misma orientación) decimos los dos bases son opuestamente orientados.

La relación de comunmente (misma) orientación es una relación de equivalencía en los bases ordenados de V. Resulta que (algebra lineal) hay exactamente dos clases de equivalencia

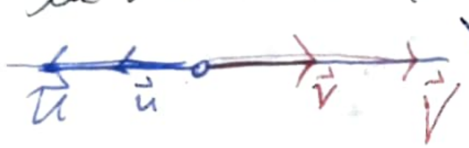
- que llamamos las dos <u>orientaciones</u> de V.
Analiticamente, distinguimos orientaciones con determinantes:

Prop: Para $(b_1,\dots,b_n)$ y $(B_1,\dots,B_n)$ dos bases ordenados de V, considera la transformación lineal: $A: V \to V$ con $A(b_j) = B_j$ (cambio de base) entonces,

- $\det(A) > 0 \iff (b_1,\dots,b_n)$ y $(B_1,\dots,B_n)$ común orientacion
- $\det(A) < 0 \iff (b_1,\dots,b_n)$ y $(B_1,\dots,B_n)$ opuesto orientacion

Ejemplos:

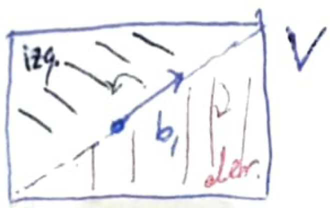
1) en dimensión 1 (V una 'linea') las dos orientaciones son las dos maneras uno puede direcionar la linea (izq. → der. ó der. → izq.)



$0 \neq \vec{v}$ y $c\vec{v}$ con $c > 0$ tienen misma orientación.

$0 \neq \vec{v}$ y $-c\vec{v}$ con $c > 0$ tienen opuestos orientaciones.

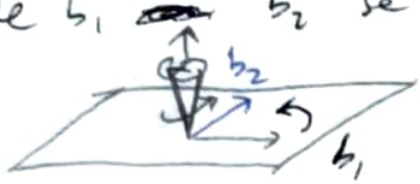
2) en dimensión 2 (V un plano) podemos distinguir las dos orientaciones con "sentido horario" y "sentido anti-horario". Mas preciso el 1'er vector b_1 en el <u>base</u> divide el plano en dos lados "izq. y der." semi-planos [visto desde 'arriba']



y distinguimos <u>dos</u> orientaciones dependiendo de cuando la 2'da vector b_2 esta en <u>izq.</u> ó <u>der.</u>

3) en dimension 3 (V un espacio) tipicamente distinguimos las dos orientaciones con "regla de mano derecha". Mas preciso, el 1'er y 2'da vectores en el base b_1, b_2 determina un plano que divide el espacio en dos partes. Distinguimos esos dos lados según si vemos b_2 en lado 'izq' o 'der' del plano b_1, b_2 cuando lo vemos el plano desde este lado:

y finalmente distinguimos dos orientaciones espacial según que tipo del parte contiene el 3'er b_3. Otros maneras distinguir los dos lados son con tornillo estandar: girando un tornillo en el sentido de b_1 hacia b_2 se mueve el tornillo arriba (o abajo):



.los resume mas concila con "regla mano derecha":

De hecho determinantes contienen <u>mas</u> información que solamente orientación, eso es miden n-volumen (con signo), por

$$\left|\det(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)\right| = n\text{-volumen del paralelipedo con lados } \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n.$$

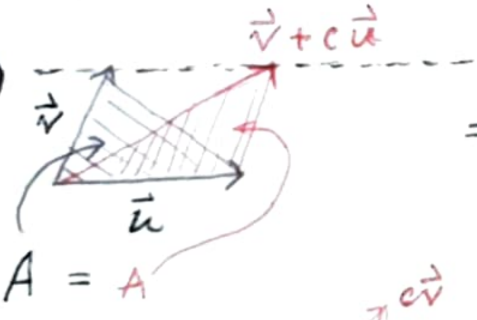
Nuestros ejemplos en dim 1, 2, 3 motivan las siguientes propiedades de signo (orientación):

Prop: (1) $\det(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_j,\dots,\vec{u}_k,\dots,\vec{u}_n)$

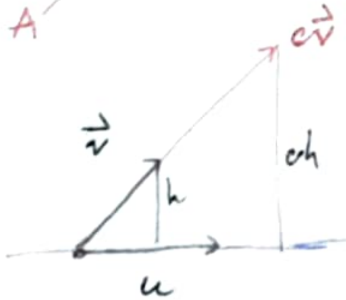
$= -\det(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_k,\dots,\vec{u}_j,\dots,\vec{u}_n)$ } intercambio de UN par cambia orientación (signo)

(2) $\det(-\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n) = -\det(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$.

Para motivar las siguientes propiedades formal consideramos que para areas/volumenes tenemos:

(*) 

$\Rightarrow \det(\vec{u},\vec{v}) = \det(\vec{u},\vec{v}+c\vec{u})$.

(*) 

$\Rightarrow \det(\vec{u},c\vec{v}) = c\det(\vec{u},\vec{v})$

de que sigue: $\det(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = \det(\vec{u},\vec{v})+\det(\vec{u},\vec{w})$

(descomponer $\vec{w} = a\vec{u}+b\vec{v}$).

Similarmente en dim. 3, y generalizando volumen inductivamente añadimos:

Prop: (3) $\det(c\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n) = c\det(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$

(4) $\det(\vec{u}_1+\vec{u},\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n) =$

$\det(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n) + \det(\vec{u},\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_n)$.

y finalmente la normalización:

$\left[\det(e_1,e_2,\dots,e_n) = 1\right]^{(*)}$

para $e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $e_n=(0,\dots,0,1)$.

Las propiedades (1)-(4) y normalización (*) determinan el determinante únicamente por su formula usual en coordenadas Cartesianas.

Comentario: La normalización (*) dice el estandard n-cubo $\underbrace{[0,1]\times\cdots\times[0,1]}_{n\text{-veces}}$ tiene n-volumen 1. Los escalandos (3) implique que un n-Rect. $[0,s_1]\times\cdots\times[0,s_n]$ tiene n-volumen:

$$s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_n.$$

Finalmente para el producto vectorial en su descripción geometrical tenemos

(1) $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$

(2) $\vec{u}\wedge(c\vec{v}) = c(\vec{u}\wedge\vec{v})$

directo de nuestro descripción de orientación (1) y de nuestros determinantes/areas en el plano para (2). El producto vectorial sería determinado únicamente cuando vemos

(3) $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{w}$

para que (en descomponer $\vec{w} = a\vec{u}+b\vec{v}+\vec{n}$ con $\vec{n}\perp\operatorname{span}\{\vec{u},\vec{v}\}$) es suficiente establecer

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{n}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{n}$$

que dejamos por ejercicio.

Notamos que en $\mathbb{R}^3$ tenemos:

$$|\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})| = |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$$
$$= A\,|\vec{u}|\cos\theta$$
$$= A\cdot h$$