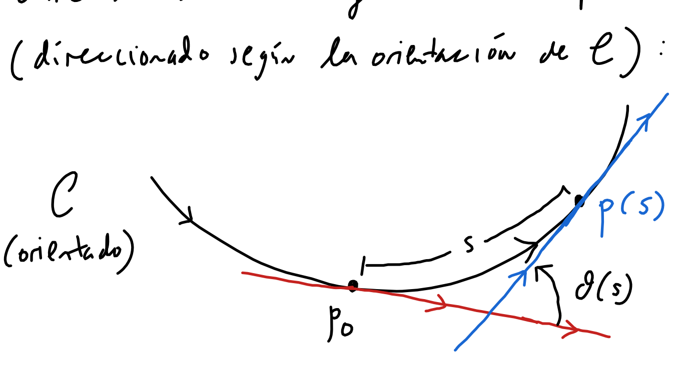
§11: Marcos de Frenet-Serret, curvatura de nuevo

Ya vimos la definición geometrical de curvatura de una curva planar usando su círculo osculando. Ahora consideramos otra equivalente definición "dinamical" de curvatura.

Para motivarlo consideramos formalizando nuestro idea de curvatura como algún medida de como las lineas tangentes de la curva cambian mientras movemos a lo largo la curva. Es decir proponemos definir curvatura como una tasa de cambio en linea tangente por cambio en desplazamiento a lo largo la curva. Un natural medida de desplazamiento a lo largo la curva es por longitud del arco, y un natural medida de diferencia entre dos lineas es por el ángulo entre ellos.

Más preciso, sea $p_0 \in \mathcal{C}$, un punto base en la curva $\mathcal{C}$ orientado. En $p(s) \in \mathcal{C}$ ubicado longitud de arco orientado s desde p_0, medimos el ángulo $\theta(s)$ en sentido anti-horario entre la linea tangente á $\mathcal{C}$ en p_0 a linea tangente en $p(s)$ (direccionado según la orientación de $\mathcal{C}$):



y definimos:

$$K(s) := \theta'(s) = \frac{d\theta}{ds}(s)$$

para la curvatura (con signo) de $\mathcal{C}$ por $p(s) \in \mathcal{C}$.

Notar: el signo ($\pm$) de la curvatura con signo depende en nuestro elección de un orientación de $\mathcal{C}$, y la convención estandar de orientación de $\mathbb{R}^2$ para medir ángulos en sentido anti-horario.

Nuestros dos definiciones son equivalentes:

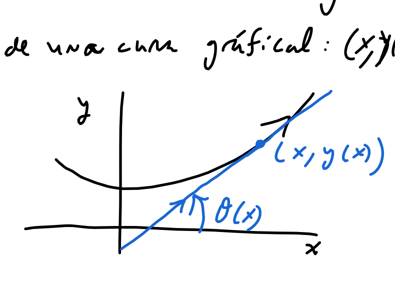
Teorema: Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ la traza de algún parametrización clase C^2 regular. Entonces:

$$|K| = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| = k = 1/r$$

donde r es el radio de curvatura (radio del círculo osculante), y $K = \frac{d\theta}{ds}$ la curvatura con signo definida arriba.

Demonstración: Trazas de parametrizaciones son localmente gráficas, entonces es suficiente considerar el caso de una curva gráfical: $(x, y(x))$. Hasta adicion de constantes tenemos:

$$\tan\theta(x) = y'(x) = \frac{dy}{dx}(x)$$

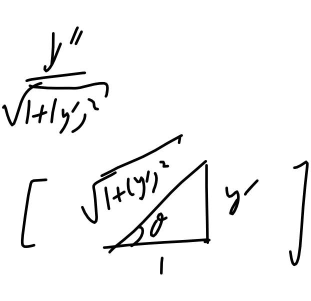


y, para $s(x)$ longitud del arco, que:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$$

entonces: $\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{ds} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}}$

y de $\tan\theta = y' \Rightarrow \sec\theta = \sqrt{1+(y')^2}$



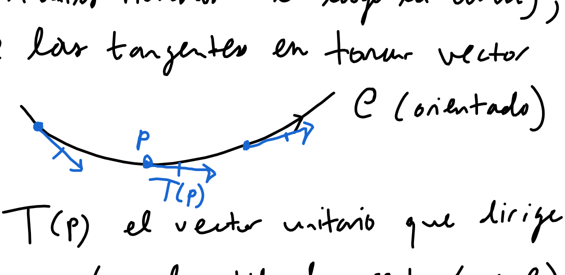
para que tenemos:

$$K = \frac{d\theta}{ds} = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}},$$

y entonces $|K| = k = 1/r$ de nuestros formulas explicitas para radio de curvatura establecido antes. $\square$

Para llegar al curvatura en un manera mas sistematica, vemos el método de marcos mobiles (Darboux), que en el contexto de curvas consiste en los marcos de Frenet–Serret.

En el caso planar, nuestro definición dinamical (tasa que dirección de tangentes cambia mientras movemos a lo largo la curva), veremos las direcciones de las tangentes en tomar vector unitario que les dirige:



para $\mathcal{C}$ una curva regular, orientado, y $p \in \mathcal{C}$, sea $T(p)$ el vector unitario que dirige la linea tangente a $\mathcal{C}$ por p (con el sentido de orientación de $\mathcal{C}$).

comentario: Para $s \mapsto p(s)$ un parametrización por longitud del arco de la curva orientada, tenemos:

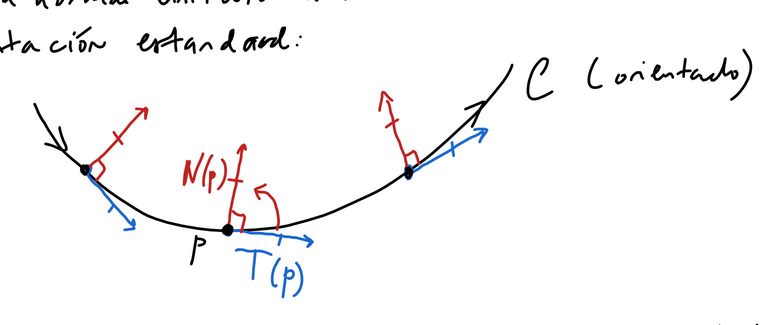
$$T(s) = T(p(s)) = p'(s) = \frac{dp}{ds}(s).$$

y para parametrización regular $t \mapsto c(t)$, entonces $T(t) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$.

Para medir los cambios en las direcciones de tangentes ($K = \frac{d\theta}{ds}$) como definimos arriba, ponemos:

$$N(p) = \text{gira de } T(p) \text{ por } \pi/2 \text{ sentido anti-horario.}$$

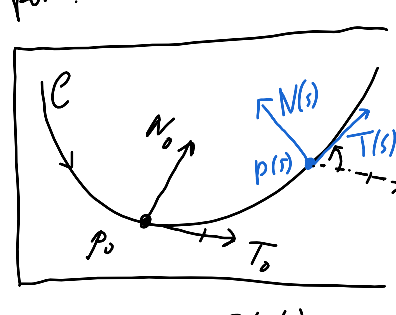
para la normal unitario a la curva orientado con las convenciones de orientación estandard:



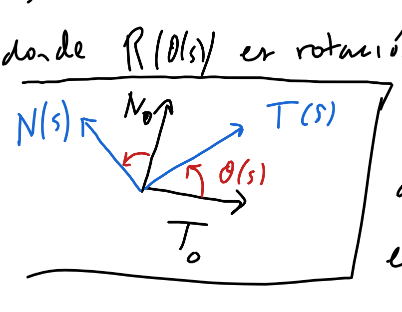
Y el ángulo entre lineas tangentes es equivalentamente el ángulo de rotación que gira el base ortonormal $T(p_0), N(p_0)$ á $T(p_1), N(p_1)$.

Si eligimos algún punto base $p_0 \in \mathcal{C}$ con parametrización por longitud de arco $s \mapsto p(s)$, $p(0) = p_0$, entonces nuestro $\theta(s)$ de antes esta dado por:

$$(1)\begin{cases} T(s) = \cos\theta(s)\, T_0 + \sin\theta(s)\, N_0 \\ N(s) = -\sin\theta(s)\, T_0 + \cos\theta(s)\, N_0 \end{cases}$$



ó, en notación matricial; $T(s) = R(\theta(s)) \cdot T_0$; $N(s) = R(\theta(s)) N_0$ donde $R(\theta(s))$ es rotación por ángulo $\theta(s)$.



Ahora, diferenciamos (1) con respeto al 's', obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$(F\text{-}S)\begin{cases} T' = (-\sin\theta\, T_0 + \cos\theta\, N_0)\,\theta' = KN \\ N' = -(c\theta\, T_0 + s\theta\, N_0)\,\theta' = -KT \end{cases}$$

donde $K = \theta'$ es la curvatura con signo. Estas últimas ecuaciones (FS) son las ecuaciones structural de curvas planares (Euclideanas) de Frenet-Serret. Las bases ortonormal $T(p), N(p)$ a lo largo la curva (base ortonormal parametrizado por puntos de la curva) es llamado el marco de Frenet-Serret a lo largo la curva (planar).

En re-escribir nuestro definición geometrical de curvatura con el marco de Frenet-Serret y sus ecuaciones structural es que podemos generalizar este método a situaciones más complicadas donde no tenemos intuición geometrical.

Las etapas principal para aplicar este método (método de marcos mobiles) a curvas planar estaban:

1) asigna a cada punto $[p \in \mathcal{C}]$ de la curva un cierto base ortonormal $[T(p), N(p)]$ "adaptado" a la curva

2) Calcular las derivadas de los bases en (1) mientras movemos a lo largo la curva. Las coeficientes de esas derivadas (escrito en el base (1)) son ciertos "curvaturas" (invariantes) de nuestra curva.

Notamos que el poder de método de marcos mobiles consiste en su generalidad: pasos 1) y 2) se puede de menudo completar en situaciones complicadas sin necesitar intuición geometrical. Unos partes "dificil" en aplicar método de marcos mobiles en general son como decide como eligir un base "adaptado" a la situación (es decir, unicamente determinado por la curva).

Con método de marcos mobiles en mente, notamos que las ecuaciones structural (F-S) de Frenet-Serret (y la curvatura) podemos obtener por las siguientes computaciones (que, en particular, no requiere casi nada de intuición geometrical).

Dado las bases ortonormal (marco Frenet-Serret):

$$s \mapsto T(s), N(s)$$

a lo largo una curva parametrizado por longitud de arco, "s", entonces (definición de ortonormal):

$$T \cdot T = 1, \quad T \cdot N = 0, \quad N \cdot N = 0.$$

Diferenciamos con respeto a 's' para tener:

$$T \cdot T' = 0, \quad T' \cdot N + T \cdot N' = 0, \quad N \cdot N' = 0$$

el 1'er ecuación dice que T' es $\perp$ a T. Eso es (que T, N son base ortonormal) T' es proporcional a N, entonces podemos escribir $T' = KN$. De misma manera, el 3'er ecuación nos dice que $N' = \lambda T$. Ahora substituimos en la 2'da ecuación obtenemos:

$$K + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -K$$

y recuperamos las ecuaciones de F-S planar:

$$\begin{cases} T' = KN \\ N' = -KT \end{cases}$$

por computación puramente algebraical. Despues uno podría reversar nuestros pasos arriba para ver $K = d\theta/ds$ es dado por nuestro definición dinamical.

Como aplicación terminamos con el siguiente "teorema fondamental de curvas planares"

Teorema: Dos curvas planares $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ [suaves, regular, orientadas] son "equivalentes" [existe isometría $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que envia $\mathcal{C}_1$ á $\mathcal{C}_2$] si y solamente si existe parametrizaciones por longitud de arco:

$$s \mapsto c_1(s) \in \mathcal{C}_1 \quad ; \quad s \mapsto c_2(s) \in \mathcal{C}_2$$

tal que las curvaturas con signos son iguales:

$$K_1(s) = K_2(s).$$

Demonstración: Consideramos la dirección cuando las curvaturas: $K_1(s) = K_2(s)$ son igual respecto a algúnas parametrizaciones por longitud de arco de las dos curvas. Entonces queremos mostrar que existe un isometría planar que tome una curva a la otra. Hacemos este en integrar las ecuaciones de Frenet–Serret. Ponemos $K(s) = K_j(s)$, y tenemos dos soluciones $T_1(s), N_1(s)$, y, $T_2(s), N_2(s)$ a las ecuaciones diferenciales:

$$\{T' = K(s)N \; ; \; N' = -K(s)T$$

con algúnos condiciones iniciales $T_1(0), N_1(0)$; $T_2(0), N_2(0)$.

Sea θ_0 el angulo que envia

$$R(\theta_0)T_1(0) = T_2(0), \quad R(\theta_0)N_1(0) = N_2(0).$$

entonces $R(\theta_0)T(s), R(\theta_0)N(s)$ es tambien solución a estas ecuaciones diferenciales con misma condicion inicial que $T_2(s), N_2(s)$ y entonces por unicidad de soluciones a edo suaves, tenemos $T_2(s) = R(\theta_0)T_1(s)$ para algún angulo θ_0 constante.

Recordando que $T_2 = c_2'$, $T_1 = c_1'$ para las parametrizaciones por longitud del arco $c_2(s), c_1(s)$ tenemos:

$$c_2'(s) = R(\theta_0)\, c_1'(s)$$

y tomando anti-derivadas que:

$$c_2(s) = R(\theta_0) \cdot c_1(s) + \vec{a}$$

por algún constante $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$, es decir que la isometría $\vec{x} \mapsto R(\theta_0)\vec{x} + \vec{a}$ envia $\mathcal{C}_1$ á $\mathcal{C}_2$. $\square$

Comentario: Presentamos la demonstración arriba porque uno procede en manera igual en situaciones mas generales. Para curvas planar se puede proceder directamente en integrar:

$$\frac{d\theta_2}{ds} = \frac{d\theta_1}{ds} \Rightarrow \theta_2(s) = \theta_1(s) + \theta_0 \;; \text{ algún } \theta_0 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow T_2(s) = R(\theta_0)T_1(s), \text{ y despues proceder como arriba.}$$