§14: Area Superficies

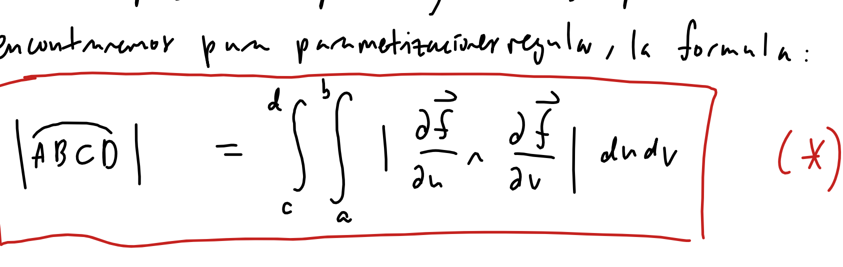
Similar al longitudes de arcos ahora consideraremos areas de "parches" de superficies. Vamos tener que considerar los dos pasos:

1) Como definir <u>area</u> de algún parche

2) Como calcular tales areas.

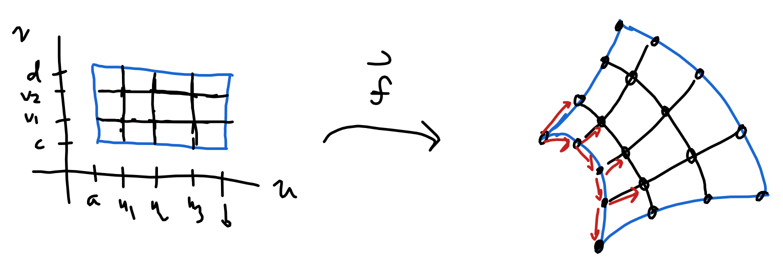
Para el 1'er parte, definaremos areas por aproximacion de la superficie con paralelogramos. En pasando al limite encontraremos para parametizaciones regular, la formula:

$$\boxed{\left|\widehat{ABCD}\right| = \int_c^d\int_a^b \left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}\right| du\,dv} \qquad (*)$$



para areas de parches parametizados como integrales dobles.

Para definir areas de parches de superficies (regular) parametizados y despues establecer ecuación (*), consideramos tal parche parametrizado por algún $\vec{f}:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}^3$ regular, y biyectiva en $(a,b)\times(c,d)$. Estimamos tal area en discretizando y añadir areas de paralelogramos de tal discretitación:



$$\text{Area} \approx \left|\left(\vec{f}(u_1,c)-\vec{f}(a,c)\right)\wedge\left(\vec{f}(a,v_1)-\vec{f}(a,c)\right)\right|$$
$$+\left|\left(\vec{f}(u_2,c)-\vec{f}(u_1,c)\right)\wedge\left(\vec{f}(u_1,v_1)-\vec{f}(u_1,c)\right)\right|$$
$$+\dots+\left|\left(\vec{f}(b,v_2)-\vec{f}(u_3,v_2)\right)\wedge\left(\vec{f}(u_3,d)-\vec{f}(u_3,v_2)\right)\right|$$

y esperamos que mientras la division del dominio:

$$\begin{cases} u_0 = a < u_1 < u_2 < \dots < u_{n-1} < b = u_n \\ v_0 = c < v_1 < v_2 < \dots < v_{m-1} < b = v_m \end{cases}$$

se va mas <u>fina</u> $(\max\{v_{j+1}-v_j,\ u_{k+1}-u_k\}\to 0)$ la suma de areas arriba tendría valor limite que converge al area de nuestro parche.

Para dar un definicion un poco más preciso, denotamos

$$\mathcal{P} = \{u_0,u_1,\dots,u_n,v_0,v_1,\dots,v_m\}$$

por una <u>partición</u> $\begin{matrix} a = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b \\ c = v_0 < v_1 < \dots < v_m = d \end{matrix}$ del $[a,b]\times[c,d]$.

medimos que "fina" es tal partición con el tamaño:

$$\|\mathcal{P}\| := \max\{u_j - u_{j-1},\ v_k - v_{k-1}\}$$

sobre $j=1,\dots,n$ y $k=1,\dots,m$. A tal partición asignamos el <u>area aproximante</u> de parche parametizado por $\vec{f}$:

$$A(\mathcal{P},\vec{f}) := \sum_{\substack{j=1,\dots,n\\k=1,\dots,m}} \left|\left(\vec{f}(u_j,v_{k-1})-\vec{f}(u_{j-1},v_{k-1})\right)\wedge\left(\vec{f}(u_{j-1},v_k)-\vec{f}(u_{j-1},v_{k-1})\right)\right|$$

Ahora dado un parche parametizado (1-1 en $(a,b)\times(c,d)$)

$$\vec{f}:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}^3$$

lo llamaremos "Rectificable" cuando para cualquier secuencia de particiones $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \dots$ del $[a,b]\times[c,d]$ que se van arbitrariamente fina: $|\mathcal{P}_j|\to 0$ mientras $j\to\infty$, las areas aproximantes:

$$A(\mathcal{P}_j,\vec{f})$$

tiene un limite finita que existe. Necesariamente, resulta que el valor de tal limite sería independiente de la elección de particiones y su valor comun es, por definición, el area de esta parche: $A = \lim_{j\to\infty} A(\mathcal{P}_j,\vec{f})$.

En la misma manera que hicimos el "sketch" para establecer la formula por longitud del arco se puede establecer:

Teorema: Sea $\vec{f}:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}^3$ un parametrización regular, y inyectiva sobre $(a,b)\times(c,d)$. Entonces $\vec{f}$ traza un parche de superficie rectificable con area dado por la integral doble:

$$\int_c^d\int_a^b \left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}\right| du\,dv.$$

Demonstración (sketch): Aplicamos teorema valor medio (y usamos que $\vec{f}$ es C^1) a los terminos en la suma del area aproximante:

$$\begin{cases} \vec{f}(u_j,v_{k-1}) - \vec{f}(u_{j-1},v_{k-1}) = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}(u_{j-1},v_{k-1}) + R_{j-1,k-1}\right)(u_j-u_{j-1}) \\ \vec{f}(u_{j-1},v_k) - \vec{f}(u_{j-1},v_{k-1}) = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}(u_{j-1},v_{k-1}) + S_{j-1,k-1}\right)(v_k-v_{k-1}) \end{cases}$$

donde (por continuidad) $R_{a,b}, S_{a,b}\to 0$ mientras $|\mathcal{P}|\to 0$ y tambien, por compactividad de $[a,b]\times[c,d]$ este convergencia esta <u>uniforme</u> en el sentido que para cualquier $\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$ tal que $|R_{a,b}|, |S_{a,b}|<\varepsilon$ todos $|\mathcal{P}|<\delta$.

En particular, obtenemos:

$$A(\mathcal{P},\vec{f}) = \sum_{\substack{j=1,\dots,n\\k=1,\dots,m}} \left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}(u_{j-1},v_{k-1})\wedge\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}(u_{j-1},v_{k-1})\right|\overbrace{\ }^{(u_j-u_{j-1})(v_k-v_{k-1})} + \mathcal{E}(\mathcal{P},\vec{f})$$

donde debido a nuestro control uniforme sobre $R_{a,b}, S_{a,b}$, y tambien de la continuidad de parciales para que $\frac{\partial\vec{f}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{f}}{\partial v}$ son acotados sobre $[a,b]\times[c,d]$ estos terminos de error son controlados por:

$$\left|\mathcal{E}(\mathcal{P},\vec{f})\right| < \varepsilon\cdot M(b-a)(c-d)$$

para algún constante $M>0$, y cualquier vez que $|\mathcal{P}|<\delta \Rightarrow |R_{a,b}|, |S_{a,b}|<\varepsilon$.

En particular, mientras $|\mathcal{P}|\to 0$ tenemos $|\mathcal{E}|\to 0$, y reconociendo el termino:

$$\sum_{\substack{j=1,\dots,n\\k=1,\dots,m}} \left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}(u_{j-1},v_{k-1})\wedge\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}(u_{j-1},v_{k-1})\right|(u_j-u_{j-1})(v_k-v_{k-1})$$

como una suma de Riemann para $\left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}\right|$, entonces tambien tal limite existe (funciones continuos son integrables) para que al final tenemos el limite de areas aproximantes es dado por una suma de limites, el 1'er que es una suma de Riemann y converge al $\int_c^d\int_a^b \left|\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}\right| du\,dv$, y el otro que es el limite de los "errores" $\mathcal{E}$ y que van al cero, para que al final la area esta dado por el doble integral anunciado. $\square$

Ejemplo:

Consideramos una esfera radio unitario $(x^2+y^2+z^2=1)$. En parametrizar por coordenadas esfericas:

$$\begin{cases} x = \sin\varphi\cos\theta \\ y = \sin\varphi\sin\theta & \theta\in[0,2\pi) \\ z = \cos\varphi & \varphi\in(0,\pi) \end{cases}$$

tenemos
$$\vec{f}_\theta = (-\sin\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\cos\theta,\ 0)$$
$$\vec{f}_\varphi = (\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ -\sin\varphi)$$

que son ortogonal, y entonces:

$$\left|\vec{f}_\theta\wedge\vec{f}_\varphi\right| = \left|\vec{f}_\theta\right|\left|\vec{f}_\varphi\right| = \sin\varphi \qquad (\varphi\in(0,\pi))$$

para que tenemos el area de la esfera unitaria:

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi = 2\pi\int_0^\pi\sin\varphi\,d\varphi = 2\pi\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^\pi$$
$$= 2\pi(-\cos\pi+\cos(0)) = \boxed{4\pi}.$$