§17: Integrales Iterativo y cambio de orden

Demostramos:

Teorema (Fubini): Sea $f:\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ continuo, con $R = R_1 \times R_2 \subset \mathrm{dom}(f)$ un $k+l$-rectangulo, con $R_1 \subset \mathbb{R}^k$ un k-rectangulo, y, $R_2 \subset \mathbb{R}^l$ un l-rectangulo. Entonces:

1) $\mathbb{R}^k \ni x \mapsto F(x) = \int_{y \in R_2} f(x,y)\, dV^l \in \mathbb{R}$, es integrable sobre $R_1 \subset \mathbb{R}^k$,

2) $$\int_{R_1} F\, dV^k = \int_R f\, dV^{k+l}$$

Comentario: Este teorema aplicado repetitivamente reduce calcular un integral multiple a calcular un serie (ó iteración) de integrales 1-variable. La teorema tambien aplica en la otra orden:

$$\mathbb{R}^l \ni y \longmapsto G(y) = \int_{x \in R_1} f(x,y)\, dV^k$$

es integrable sobre $R_2 \subset \mathbb{R}^l$ con:

$$\int_{R_2} G\, dV^l = \int_R f\, dV^{l+k} = \int_{R_1} F\, dV^k \qquad (*)$$

ó: $$\int_{R_2}\left(\int_{R_1} f(x,y)\, dx\right) dy = \int_R f\, dx\, dy = \int_{R_1}\left(\int_{R_2} f(x,y)\, dy\right) dx,$$

ó, escribiendo $(*)$ en notación mas lleno se ve como:

$$\int_{\alpha_l}^{\beta_l} \cdots \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[\int_{a_k}^{b_k} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\, dx_1 \ldots dx_k\right] dy_1 \ldots dy_l$$

$$= \int_{\alpha_l}^{\beta_l} \cdots \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{a_k}^{b_k} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\, dx_1 \ldots dx_k\, dy_1 \ldots dy_l$$

$$= \int_{a_k}^{b_k} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{\alpha_l}^{\beta_l} \cdots \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x,y)\, dy_1 \ldots dy_l\right] dx_1 \ldots dx_k.$$

Para $R_1 = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_k,b_k]$, y $R_2 = [\alpha_1,\beta_1] \times \ldots \times [\alpha_l,\beta_l]$.

---

demonstración: 1ro notamos que debido a que f es continuo sobre $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \ni (x,y)$, tambien es, para cada x fijado, $\mathbb{R}^l \ni y \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ continuo, y en particular integrable.

entonces
$$\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_{y \in R_2} f(x,y)\, dV^l =: F(x)$$

si esta definido (la integral sobre $y \in R_2$ existe para cada x fijo)

Para demostrar F es integrable sobre $R_1 \subset \mathbb{R}^k$, sea

$$\mathcal{P}_1 = \{\rho_1, \rho_2, \ldots\}$$

algún partición (finita) de R_1, y:

$$p_1 = \{p_1, p_2, \ldots\} \qquad (p_j \in \rho_j)$$

algún muestreo de puntos en $\mathcal{P}_1$: $(p_1 \in \mathcal{P}_1)$.

Entonces queremos mostrar que las sumas de Riemann:

$$S(\mathcal{P}_1, p_1) = \sum_{\rho_j \in \mathcal{P}_1} F(p_j)\, \mathrm{Vol}(\rho_j)$$

tienen un limite mientras $\|\mathcal{P}_1\| \to 0$.

Para establecer la existencia de tal limite vamos relacionando con limites de sumas de Riemann que convergen al $\int_R f\, dV^{k+l}$ (f es continuo $\Rightarrow$ f integrable). Entonces consideramos que (definicion de F) que:

$$F(p_j) = \int_{y \in R_2} f(p_j, y)\, dV^l$$

y, si:

$$\mathcal{P}_2 = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$$

es algún partición (finita) de R_2, tenemos la partición:

$$\mathcal{P} = \{R_{jk} = \rho_j \times \sigma_k : \rho_j \in \mathcal{P}_1, \sigma_k \in \mathcal{P}_2\}$$

de $R = R_1 \times R_2$. Ahora podemos escribir:

$$(*) \quad F(p_j) = \sum_{\sigma_k \in \mathcal{P}_2} \left(\int_{y \in \sigma_k} f(p_j, y)\, dV^l\right)$$

donde, si ponemos:

$$m_{jk} = \min\{f(x,y) : (x,y) \in R_{jk} = \rho_j \times \sigma_k\}$$

$$M_{jk} = \max\{f(x,y) : (x,y) \in R_{jk} = \rho_j \times \sigma_k\}$$

tenemos $(p_j \in \rho_j)$:

$$m_{jk} \le f(p_j, y) \le M_{jk} \qquad \forall y \in \sigma_k$$

$$\Rightarrow \quad (**) \quad m_{jk}\, \mathrm{Vol}(\sigma_k) \le \int_{y \in \sigma_k} f(p_j, y)\, dV^l \le M_{jk}\, \mathrm{Vol}(\sigma_k)$$

y substitución de $(**)$ en $(*)$ obtenemos:

$$(1) \quad \sum_{\sigma_k \in \mathcal{P}_2} m_{jk}\, \mathrm{Vol}(\sigma_k) \le F(p_j) \le \sum_{\sigma_k \in \mathcal{P}_2} M_{jk}\, \mathrm{Vol}(\sigma_k)$$

y obtenemos:

$$S(\mathcal{P}_1, p_1) = \sum_{\rho_j \in \mathcal{P}_1} F(p_j)\, \mathrm{Vol}(\rho_j)$$

esta controlado por:

$$\sum_{R_{jk} \in \mathcal{P}} m_{jk}\, \mathrm{Vol}(R_{jk}) \le S(\mathcal{P}_1, p_1) \le \sum_{R_{jk} \in \mathcal{P}} M_{jk}\, \mathrm{Vol}(R_{jk})$$

el lado izquierda es una suma de Riemann inferior para la integral de f sobre R, y el lado derecha una suma de Riemann superior para la integral de f sobre R. Que f es continuo y entonces integrable, estos dos lados convergen al $\int_R f\, dV^{k+l}$ mientras $\|\mathcal{P}\| \to 0$ (y $\|\mathcal{P}_1\| \to 0$) y entonces por sandwich, tambien $S(\mathcal{P}_1, p_1)$ converge mientras $\|\mathcal{P}_1\| \to 0$, y su valor limite es $\int_{R_1} F\, dV^k = \int_R f\, dV^{k+l}$. $\square$
