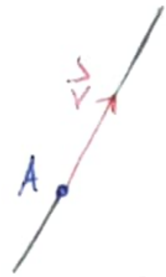
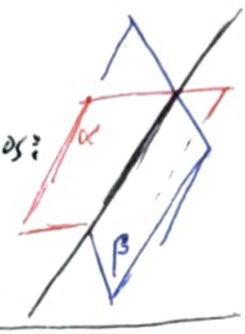
§3: Un poco geometría analítica

Consideramos unas formulas para líneas, planos, y algebra lineal.

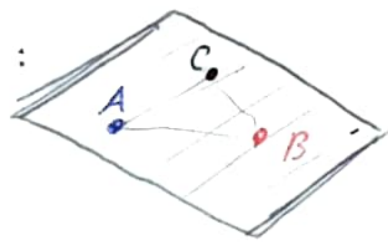
Una LINEA sería determinado por

- dos puntos: 

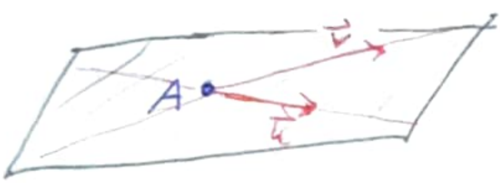
- un punto, y, un dirección (vector): 

- en $\mathbb{R}^3$: por la intersección de dos planos: 

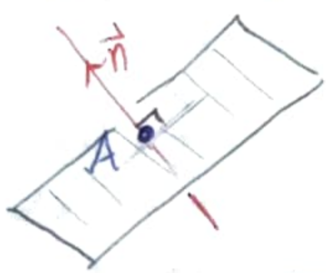
Un PLANO sería determinado por

- tres puntos (no colineal): 

- un punto y dos direcciones:

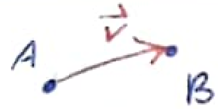


- en $\mathbb{R}^3$: un punto y un dirección (NORMAL):



En formulas describimos líneas/planos por parametrizaciones, ó, ecuaciones implícitas siguientes:

Lineas:



(1) $\mathbb{R} \ni t \longmapsto (1-t)A + tB \in \mathbb{R}^n$

$$= (1-t)(a_1,\dots,a_n) + t(b_1,\dots,b_n)$$

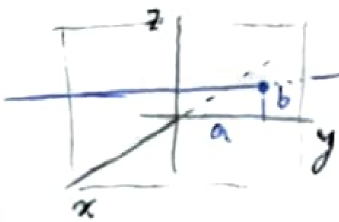
$$= (a_1,\dots,a_n) + t(b_1-a_1,\dots,b_n-a_n) = A + t\vec{v}$$

parametriza una linea por A y B (ó por A y con dirección $\vec{v} = \vec{AB}$).

(2) Si eliminamos 't' de la parametrización (1) llegaremos a una formula implicita de la linea (como un intersección de $n-1$ hiperplanos).
Para $n = 3$, tenemos:

$$x = a_1 + tv_1,\quad y = a_2 + tv_2,\quad z = a_3 + tv_3$$

con p.ej. $v_1 \neq 0$ para que $t = \frac{x-a_1}{v_1}$, y:



(*) $\left[\, y = a + ux,\quad z = b + vx \,\right]$

con $\begin{cases} a = a_2 - \frac{v_2}{v_1}a_1, & b = a_3 - \frac{v_3}{v_1}a_1 \\ u = \frac{v_2}{v_1}, & v = \frac{v_3}{v_1}. \end{cases}$

Ecuación (*) es la ecuación implicita para la linea, dado por un intersección de 2 planos, ó equivalentemente por la gráfica de una función lineal (más una vector const.) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (a+ux, b+vx)$.

En dimensión 'n' (cuando $\overbrace{b_1-a_1}^{v_1} \neq 0$ p.ej.) obtenemos:

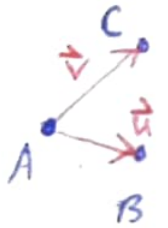
$$\left[\, x_2 = \alpha_2 + \mu_2 x_1,\ x_3 = \alpha_3 + \mu_3 x_1, \dots, x_n = \alpha_n + \mu_n x_1 \,\right]$$

gráfica $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, cst. + lineal.

PLANOS:

(1) $\mathbb{R}^2 \ni (s,t) \longmapsto (1-s-t)A + sB + tC \in \mathbb{R}^n$

$$= A + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$$



$$= (a_1, \dots, a_n) + s(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n) + t(c_1 - a_1, \dots, c_n - a_n)$$

parametriza un plano por A, B, C [ó por A y en las direcciones $\vec{u} = \vec{AB}$ y $\vec{v} = \vec{AC}$].

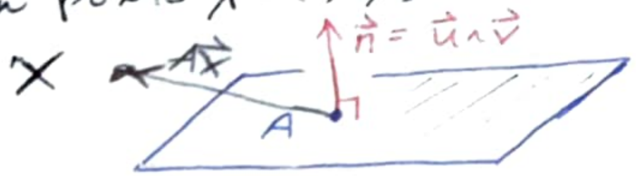
(2) Si eliminamos 's, t' de la parametrización (1) llegaremos a formula implicita para el ~~...~~ plano (como un intersección de $n-2$ hiperplanos). Por ejemplo, cuando $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$ tendriamos las formulas:

$$\boxed{x_3 = \alpha_3 + \mu_3 x_1 + \nu_3 x_2, \dots, x_n = \alpha_n + \mu_n x_1 + \nu_n x_2}$$

algunas constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \mu_1, \nu_1, \dots, \mu_n, \nu_n$.
Entonces tambien podemos ver el plano como gráfica de un funcion $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ de forma const. + Lineal.
Para $n=3$ podemos ser más eficiente usando nuestros productos geometrical:

(*) el normal al plano es proporcional a $\vec{u} \wedge \vec{v}$

(*) un punto $X = (x,y,z)$ esta en el plano $\iff (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{AX}) = 0$



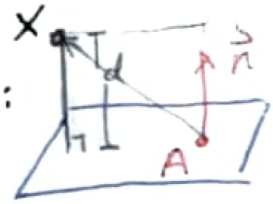
Entonces, su ecuación implicita es:

$$\boxed{n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) + n_3(z - a_3) = 0}$$

para $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = \vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$.

Distancias / Proyecciones

Consideramos unas formulas para distancias entre sub-espacios.



(1) distancia de un punto, á un plano:

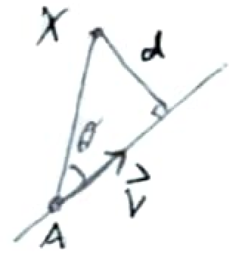
para A en el plano, y $\vec n$ normal,

la distancia de X al plano es: $\frac{|\vec{AX}\cdot\vec n|}{|\vec n|} = d$

(2) distancia de un punto, á una linea:

para A en la linea, y $\vec v$ dirigiendo la linea,

la distancia de X al linea es:



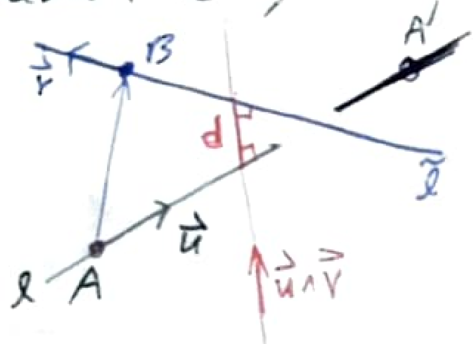
$$d = \left|\vec{AX} - \left(\frac{\vec{AX}\cdot\vec v}{\vec v\cdot\vec v}\right)\vec v\right| = \frac{|\vec v \wedge \vec{AX}|}{|\vec v|}$$

(3) distancia entre dos lineas:

para A, $\vec u$ y B, $\vec v$ punto/dirr. de cada linea,

la distancia entre ellos es:

$$d = \frac{|(\vec u\wedge\vec v)\cdot\vec{AB}|}{|\vec u\wedge\vec v|}$$



NOTAR: $\vec{AB}\cdot(\vec u\wedge\vec v) = \vec{A'B}\cdot(\vec u\wedge\vec v)$ cualquier $A'\in \ell$ $(A' = A + t\cdot\vec u)$.