§ 22: Teorema divergencia (Gauss)

Consideramos la siguiente generalización del teorema Green (en forma divergencia) del plano á $\mathbb{R}^3$:

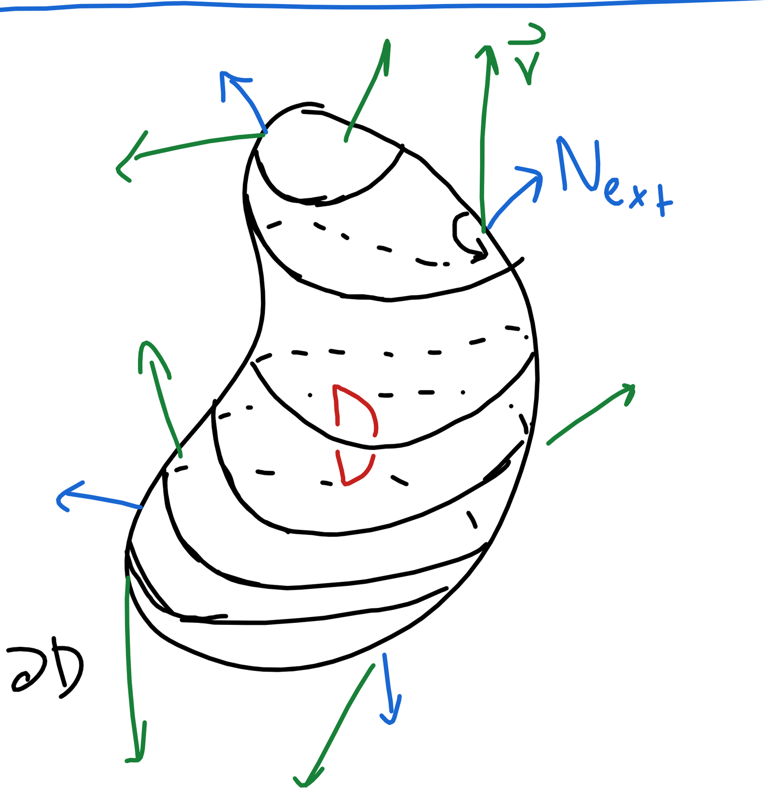
Teorema: Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ una region sólido con frontera, ∂D, un superficie cerrado regular (C^1) por trozos (tambien se puede decir la superficie ∂D encierre la región D). Entonces para $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1, tenemos:

$$\oint_{\partial D} (\vec{v} \cdot N_{ext})\, dA = \int_D div(\vec{v})\, dV$$

donde N_{ext} es el normal unitario exterior lado de D, y para $\vec{v} = (P, Q, R)$ en componentes:

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

La divergencia de $\vec{v}$ ($div(\vec{v}): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$).



Comentario: Otras notaciones comunes:

$$div(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v}$$

para la divergencía de $\vec{v}$, y para las integrales más explicita en componentes $\vec{v} = (P, Q, R)$:

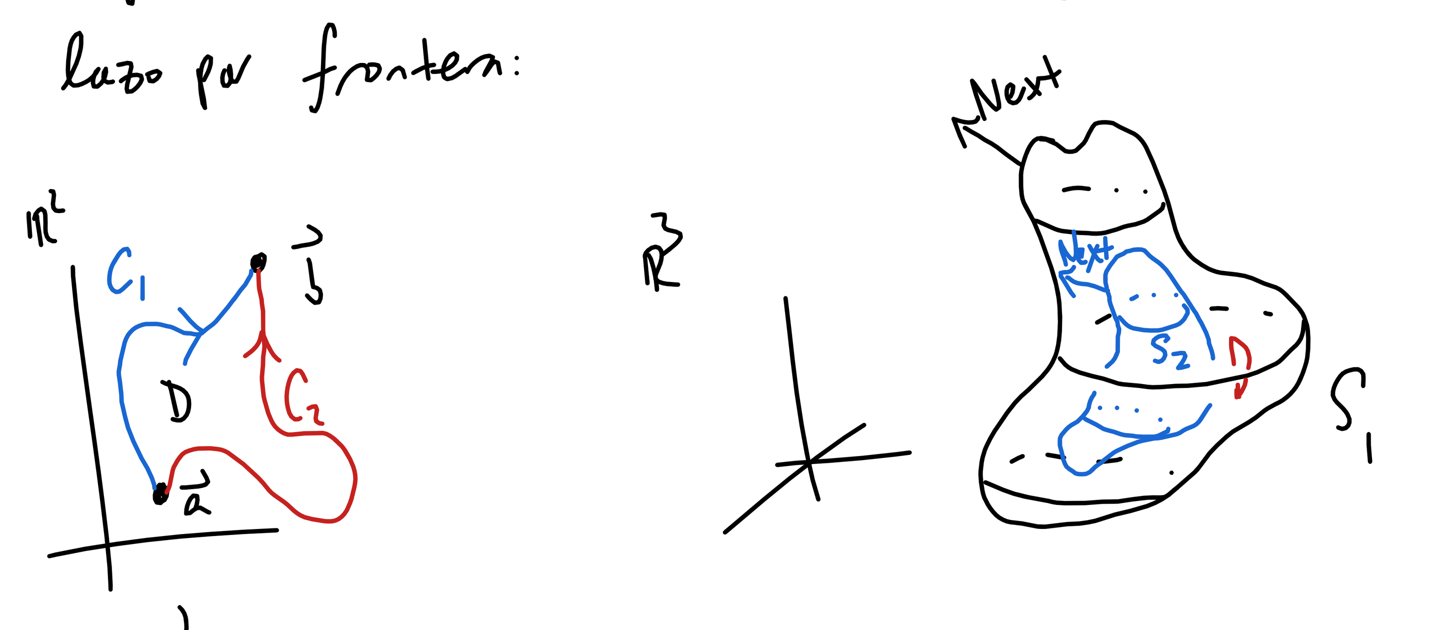
$$\oint_{\partial D} P\, dy\wedge dz + Q\, dz\wedge dx + R\, dx\wedge dy = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

Comentario: La teorema divergencia tiene la misma interpretación fisical (en terminos de un fluido fluyendo dirigido por las velocidades $\vec{v}(p)$ de sus particulos) como en el caso planar. Es decir:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Vol(\varphi_t(D)) = \int_D div(\vec{v})\, dV$$

para $\varphi_t: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el flujo asociado á $\vec{v}$, y la integral superficie interpretamos como la taza fluido esta saliendo por la frontera ∂D.

Comentario: Igual como podemos usar la teorema de Green para determinar como un integral de linea depende por eleción de arco (ó sendero) entre dos puntos fijos, la teorema divergencía nos permite medir como integral de superficie depende de eleción de algún parche con dado lazo por frontera:



Green

$$\int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} - \int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

divergencía (Gauss)

$$\oint_{S_1} \vec{v} \cdot N_{ext}\, dA - \oint_{S_2} \vec{v} \cdot N_{ext}\, dA = \int_D div(\vec{v})\, dV.$$

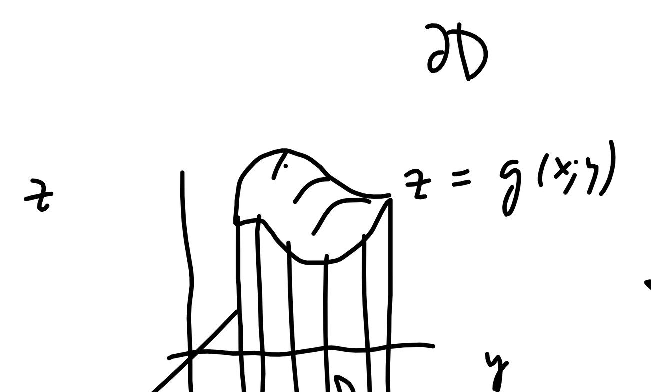
---

demonstración: La demonstración geométrical que hicimos para la variante divergencia (planar) de Green pueden aplicar igual en $\mathbb{R}^3$ (ó cualquier dimensión) sin cambios.

Alternativamente para regiones solidos que son particionados en varios regiones graficas sobre xy (ó yz, ó zx) podemos aplicar similar argumento como nuestro demonstración analitical de Green para ver que para tales dominios es suficiente establecer:

$$\int_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \int_{\partial D} \vec{v} \cdot N_{ext}\, dA$$

donde



$$D = \{ f(x,y) \le z \le g(x,y) : (x,y) \in \bar{D} \}$$

para algún dominio simple $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$.

que uno puede verificar para ejercicio. $\square$
