§23: Teorema Stokes (rotacional)

Consideramos la siguiente generalización de teorema de Green del plano a $\mathbb{R}^3$:

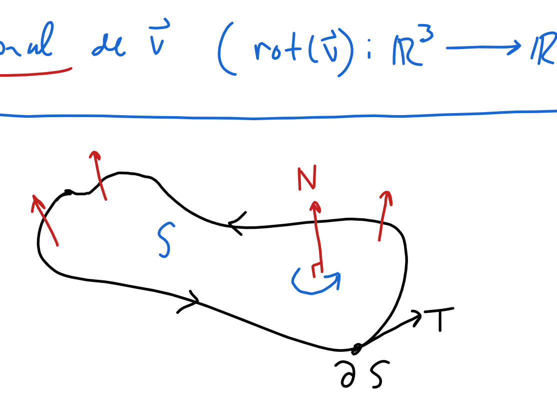
Teorema (Stokes): Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular con frontera, ∂S, una curva cerrada regular por trozos, y $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces:

$$\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot T \, ds = \int_S \mathrm{rot}(\vec{v}) \cdot N \, dA$$

donde la superficie S y frontera ∂S tienen orientación por N, T tal que $N \wedge T$ esta direccionada interior al S, y para $\vec{v} = (P, Q, R)$ en componentes tenemos:

$$\mathrm{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

la rotacional de $\vec{v}$ $\left(\mathrm{rot}(\vec{v}): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \right)$.



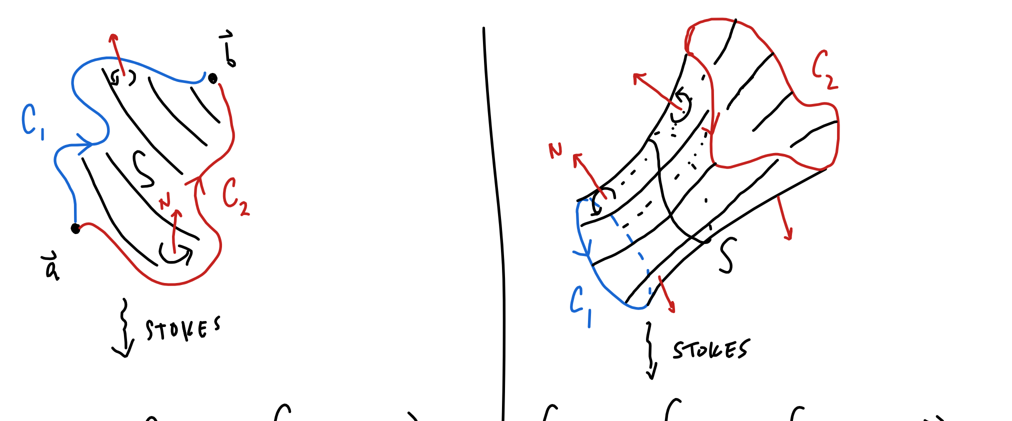
Comentario: OTRAS NOTACIONES COMÚN:

$$\boxed{\mathrm{rot}(\vec{v}) = \mathrm{curl}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v}}$$

para la rotacional de $\vec{v}$, y para las integrales tenemos más explícita en componentes $\vec{v} = (P, Q, R)$:

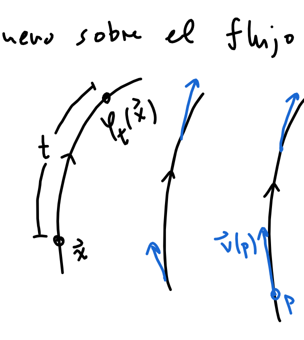
$$\boxed{\oint_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_S (R_y - Q_z)\,dy \wedge dz + (P_z - R_x)\,dz \wedge dx + (Q_x - P_y)\,dx \wedge dy}$$

Comentario: Igual como teorema Green en el plano nos permite comparar varias integrales de línea sobre varias curvas planas, tenemos la misma con la teorema de Stokes:



$$\int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_S \mathrm{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{A} \qquad \oint_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_S \mathrm{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{A}$$

Comentario: Para dar una interpretación geométrica a $\mathrm{rot}(\vec{v})$, pensamos de nuevo sobre el flujo: $\varphi_t: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de $\vec{v}$

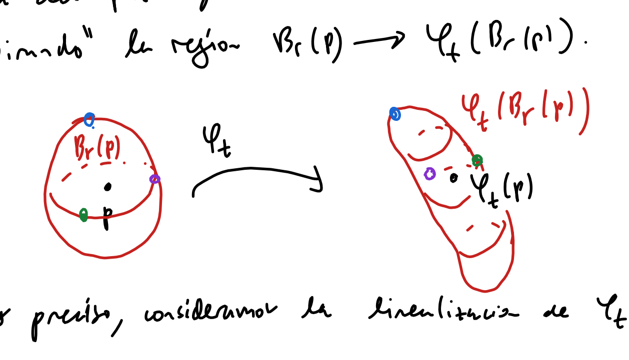


[que $\vec{v}$ sea campo de velocidades de partículas de algún fluido fluyendo alrededor en espacio, y para $p \in \mathbb{R}^3$ tomamos $\varphi_t(p) \in \mathbb{R}^3$ por la posición de este partícula de fluido despues tiempo $t \in \mathbb{R}$].

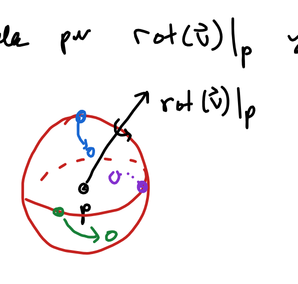
Ahora elige algún $p \in \mathbb{R}^3$ y una bola (pequeño) $B_r(p)$ centrado por p (y de radio r). Despues un tiempo $t \in \mathbb{R}$ las partículas que constituyen $B_r(p)$ van a fluir al $\varphi_t(B_r(p))$, y podemos entender propiedades de $\vec{v}$ (y su flujo φ_t) en como $\varphi_t(B_r(p))$ esta "deformando" la bola original $B_r(p)$.

Por ejemplo la divergencia de $\vec{v}$ esta midiendo como la volumen de $B_r(p)$ cambia bajo el flujo de $\vec{v}$ $\left[\mathrm{div}(\vec{v})\big|_p = \lim_{r \to 0} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\mathrm{Vol}(\varphi_t B_r(p))}{\mathrm{Vol}(B_r(p))} \right]$.

La descripción geométrica de $\mathrm{rot}(\vec{v})$ se trata con como el flujo esta "girando" la región $B_r(p) \to \varphi_t(B_r(p))$.



mas preciso, consideramos la linealización de φ_t alrededor p que descompone en un parte de escalamientos a lo largo ejes, y un parte rotacional que, cuando $t \to 0$ están la rotación girando por el eje direccionado por $\mathrm{rot}(\vec{v})\big|_p$ y con velocidad angular $\frac{1}{2}\left\|\mathrm{rot}(\vec{v})\big|_p\right\|$:

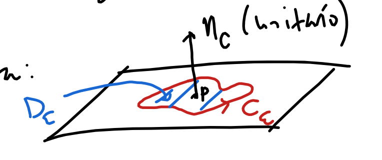


Ahora la teorema de Stokes esta diciendo que si por un instante restringimos el fluido a fluir sobre S la neta/total cantidad con que el fluido esta "girando" se mide con la neta/total velocidad se esta circulando alrededor la frontera ∂S.

Como una medida más preciso (y para ver el factor $\frac{1}{2}$), podemos considerar que sigue de expansión Taylor que:

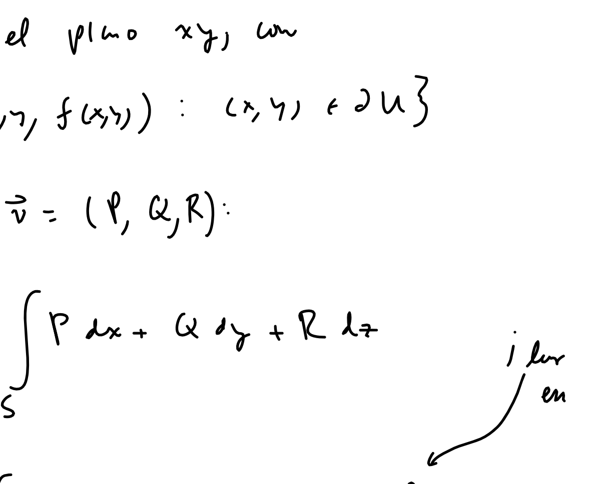
$$\oint_{C_\varepsilon} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \left(\mathrm{rot}(\vec{v})\big|_p \cdot n_C + o(\varepsilon) \right) \mathrm{Area}(D_\varepsilon)$$

para:



y $\varepsilon \sim \mathrm{longitud}(C_\varepsilon)$, p.ej C_ε un cuadrado centrado por p con lado de longitud ε.

demonstración: Para demonstrar la teorema de Stokes, procedemos similar a los anteriores. Que la superficie esta regular, sería union de varias parches grafical, entonces por linealidad sería suficiente establecer la formula para un parche de superficie gráfical. Consideremos el caso de un gráfica sobre plano xy (dos otros casos se establece igual, solo con apropiado cambio de letras):



$N \sim (-f_x, -f_y, 1)$

$$S = \{ (x, y, f(x,y)) : (x,y) \in U \}$$ para U un dominio apropiado en el plano xy, con

$$\partial S = \{ (x, y, f(x,y)) : (x,y) \in \partial U \}$$

entonces, para $\vec{v} = (P, Q, R)$:

$$\int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

¡los coeficientes evaluamos en $(x, y, f(x,y))$!

$$= \int_{\partial U} (P + R f_x)\,dx + (Q + R f_y)\,dy$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \int_U \frac{\partial}{\partial x}(Q + R f_y) - \frac{\partial}{\partial y}(P + R f_x) \, dx\,dy$$

$$= \int_U \Big[Q_x + Q_z f_x + (R_x + R_z \cancel{f_x}) f_y + R \cancel{f_{yx}} - P_y - P_z f_y - (R_y + R_z \cancel{f_y}) f_x - R \cancel{f_{xy}} \Big] \, dx\,dy$$

$$= \int_U \Big[-(R_y - Q_z) f_x - (P_z - R_x) f_y + Q_x - P_y \Big] \, dx\,dy$$

$$= \int_S \underbrace{(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)}_{\mathrm{rot}(\vec{v})} \cdot N \, dA. \qquad \square$$