§4: Isometrías Euclideanas

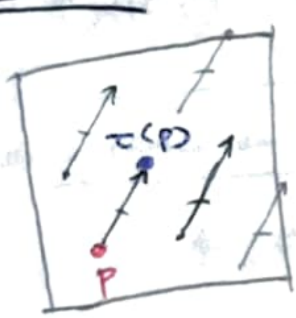
Ingredientes básicos de geometría son

1er) las cantidades (conceptos invariantes) de interés

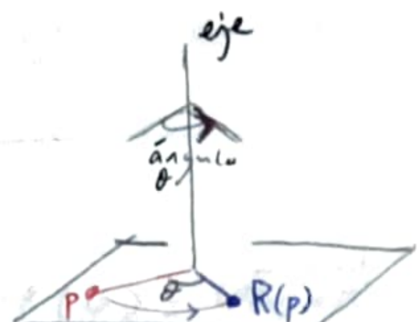
p.ej: longitud, angulo, area, ...

2da) las transformaciones/mociones que preservan tales cantidades (las isometrías de la geometría).

Ya hemos visto las cantidades relevantes de geometría Euclideana (longitud, ángulo ≡ producto escalar) y nuestra idea de vector LIBRE como un desplazamiento es un ejemplo de un isometría: las traslaciones.
En geometría Euclideana un más interesante isometría son las ROTACIONES que queremos describir ahora.



traslación
$p \mapsto \tau(p) = p + \vec{v}$



rotación (de $\mathbb{R}^3$).
$p \mapsto R(p) \ldots$

Pensaremos sobre $\mathbb{R}^3$, pero nuestros resultados (y demostraciones algebraicas) serían válidos en $\mathbb{R}^n$.

* [Entonces sea V $(=\mathbb{R}^n)$ un esp. vect. real de dimensión n con un producto escalar $\langle \cdot , \cdot \rangle$] *

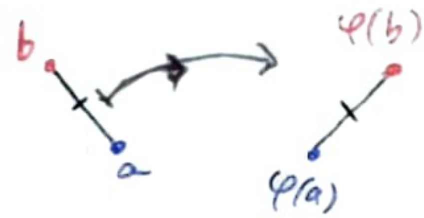
Nos interesa en las transformaciones (bijecciones)

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

que preservan distancias (las isometrías):

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| = |\overrightarrow{\varphi(a)\varphi(b)}| = |\overrightarrow{ab}| = |a-b|, \text{ t.q.}$$

donde $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$, $\vec{u} \in V$.



Demostraremos:

Teorema (GRUPO EUCLIDEANO): Si $\varphi : V \to V$ es una transformación que preserva distancias, entonces

$$\varphi(\vec{v}) = R(\vec{v}) + \vec{\tau} \quad ; \forall \vec{v} \in V$$

donde $\vec{\tau} \in V$ es fijado (un translation) y $R : V \longrightarrow V$ un aplicación lineal t.q.

$(R\vec{u})\cdot(R\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ [UN ROTACIÓN general].

---

demostración) Ponemos

$$\phi(\vec{v}) := \varphi(\vec{v}) - \varphi(0) = \overrightarrow{\varphi(0)\varphi(\vec{v})}$$

entonces:

(*) $\phi : V \to V$, $\phi(0) = 0$, y

$$|\phi(\vec{v})| = |\varphi(\vec{v}) - \varphi(0)| = |\vec{v} - 0| = |\vec{v}|$$

(φ preserva distancias).

queremos demostrar que ϕ es un rotación general, es decir 1) ϕ es lineal y 2) $\phi\vec{u}\cdot\phi\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$.

1'er mostramos que $\phi\vec{u}\cdot\phi\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}\ \forall \vec{u},\vec{v}\in V$.

NOTAR que:

1) $|\phi(\vec{v})-\phi(\vec{u})| = |\varphi(\vec{v})-\varphi(\vec{u})| = |\vec{v}-\vec{u}|$

$\forall \vec{u},\vec{v}\in V$ (porque φ preserva dist.).

entonces:

(*) $|\phi(\vec{v})-\phi(\vec{u})|^2 = |\phi(\vec{v})|^2 - 2\phi(\vec{u})\cdot\phi(\vec{v}) + |\phi(\vec{u})|^2$
$= |\vec{v}|^2 - 2\phi(\vec{u})\cdot\phi(\vec{v}) + |\vec{u}|^2$

(porque $|\varphi(\vec{v})| = |\vec{v}|\ \forall \vec{v}\in V$)

y $|\phi(\vec{v})-\phi(\vec{u})|^2 = |\vec{v}-\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{u}|^2$ (**)

entonces de (1), y (*) = (**) tenemos:

[*] $\boxed{\phi(\vec{u})\cdot\phi(\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v} \quad \forall \vec{u},\vec{v}\in V}$

Usando [*] podemos deducir que ϕ es LINEAL en expandir

$|\phi(\vec{u}+\vec{v}) - \phi(\vec{u}) - \phi(\vec{v})|^2$

y $|\phi(c\vec{u}) - c\phi(\vec{u})|^2$, que gracias a (*), expande a zero (ejercicio); es decir usando que $|\vec{a}| = 0 \iff \vec{a} = 0$, tenemos que

$\phi(\vec{u}+\vec{v}) = \phi(\vec{u}) + \phi(\vec{v})$, y $\phi(c\vec{u}) = c\phi(\vec{u})$,

ó que ϕ es lineal, y preserva el producto (un ROTACIÓN general). $\square$

Para unas formulas que describan rotaciones, considera que (preservando productos escalar) un rotación va a enviar un base ortonormal a algún otra base ortonormal:

$$R(e_1) = E_1 , \ldots , R(e_n) = E_n$$

donde $e_1, \ldots, e_n$ un base ortonormal, y también

$E_1, \ldots, E_n$ " " " .

=

Notar que en coordenadas el producto escalar se escribe como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = [\vec{u}]^T \cdot [\vec{v}]$$

TRANSPUESTA

donde $[\vec{u}] = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $[\vec{v}] = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ (y $[\vec{u}]^T = (u_1, \ldots u_n)$).

=

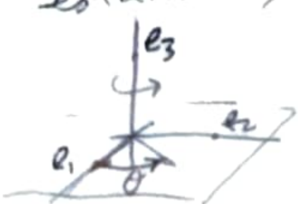
Entonces el matriz de rotation $R(e_j) = E_j$; es decir

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ E_1 & E_2 & \ldots & E_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = [R] \quad \text{tiene:}$$

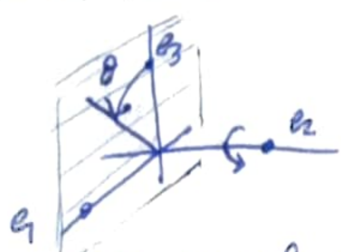
$$\boxed{[R]^T \cdot [R] = Id_{n \times n}}$$; ya que $E_k \cdot E_k = 1$; $E_j \cdot E_k = 0$ $j \neq k$

y $[R]^T = \begin{pmatrix} - E_1 - \\ - E_2 - \\ \vdots \\ - E_n - \end{pmatrix}$.

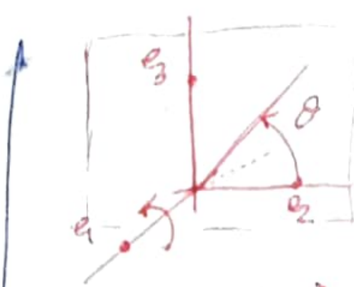
Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ tenemos alrededor los ejes estandar, las matrices:



$$\begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} s\theta & 0 & c\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -c\theta & 0 & s\theta \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{pmatrix}.$$