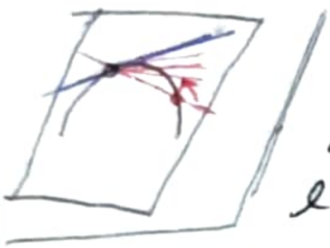
§ 5: Continuidad, Diferenciabilidad

Consideramos las definiciones basicos para el cálculo diferencial (aproximación lineal): Primeri

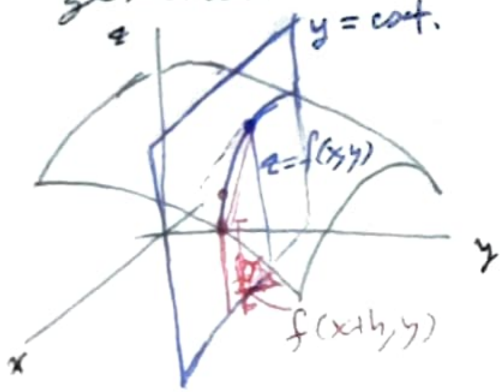
Derivadas Parciales/Direccional

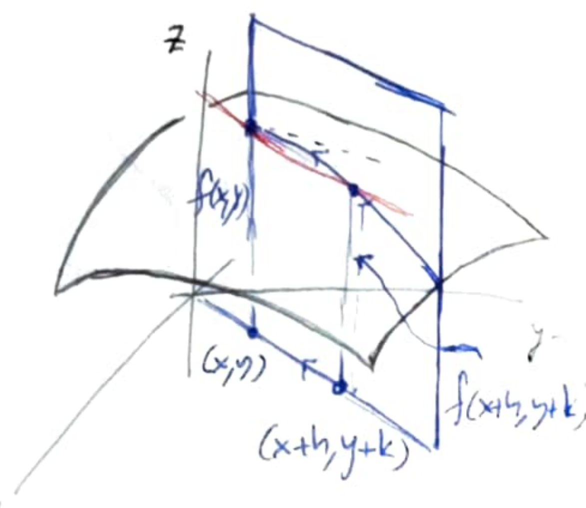
recordamos que tangentes a curvas planar son las limites (cuando existen) de curvas secantes:



Podemos aplicar la misma idea a un superficie en espacio para encontrar lineas tangentes a tal superfivie en tomando eslizas del superficie con planos:

En coordenadas, eslizando por los planos coordenadas determina lineas tangentes cuyos pendientes son dados por derivadas parciales, mientras eslizar por planos general con derivadas direccionales. Para sus formulas/definición general:



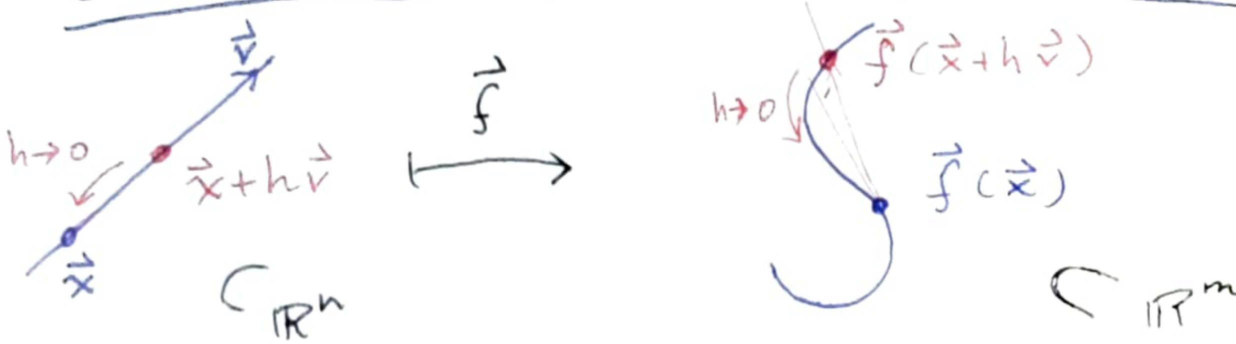


$\boxed{\text{Def:}}$ Las derivadas parciales de $\vec{f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en el punto $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ son los límites (cuando existen) de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_1} := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\vec{f}(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - \vec{f}(x_1, \dots, x_n)}{h} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_n} := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\vec{f}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n+h) - \vec{f}(x_1, \dots, x_n)}{h} \end{cases}$$

La derivada direccional de $\vec{f}$ en el punto $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ por la dirección $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ es el límite (cuando existe) de:

$$\left\{ \lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x} + h\vec{v}) - \vec{f}(\vec{x})}{h} =: \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) \right.$$



Entonces las derivadas parciales son derivadas direccionales por las direcciones de los ejes de las coordenadas.

Si consideramos la n-superficie (variedad) gráfica asociada a $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, las líneas $\{(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) + t(\vec{v}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x})) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ serían líneas tangente a tal gráfica por el punto $(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))$.

Más explícita, si escribimos

$$\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) \ , \text{ con } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

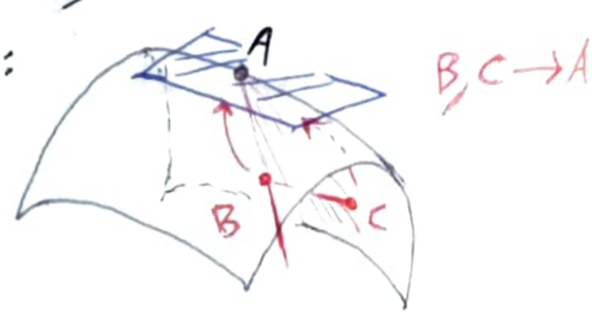
donde $f_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \right).$$

Diferenciales:

Ahora consideramos formalizando/generalizando la idea de un (hiper)-plano tangente a un gráfica con la definición de diferencial de un función (aproximación lineal).

Considera un superficie en espacio tiene plano tangente por el punto A el plano límite (cuando existe) de los planos por A, B, C mientras B, C en el superficie limiten hacia A:



OJO:

(*) La noción de plano tangente es diferente que derivadas parciales/direccional ya que

1) consideramos límite de planos en lugar de líneas secantes.

2) No ponemos ningún restricción en la manera (sendero) que siguen B, C mientras limiten á A

deriv. direccional. ≠ plano tangente (diferencial).

(*) cualquier LINEA tangente a la superficie sería contenida en el plano tangente. Entonces podemos considerar el plano tangente (cuando existe) determinado por sus derivadas direccionales (líneas tangentes).

En coordenadas, para una superficie grafical las ultimas observaciones implican/traducen á:

*) si el plano tangente existe entonces esta dado por: $z = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y + c$ (constante).

*) si el plano tangente existe, entonces cada derivada direccional existe y esta dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = v_1 \frac{\partial f}{\partial x} + v_2 \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{donde } \vec{v} = (v_1, v_2)).$$

NOTA en particular que la derivada direccional tiene que ser dado por un cierto aplicación lineal $\left[(v_1, v_2) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_2 \right]$, cuyo gráfica es el plano tang.

Def: Una transformation $\vec{f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable por el punto $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ cuando existe algún transformación lineal

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

tal que:

$$\left[\lim_{\vec{h}\to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - L(\vec{h})}{|\vec{h}|} = 0\right]$$

El limite entendemos en el sentido siguientes.

*) para cualquier sendero $t \mapsto \vec{h}(t) \in \mathbb{R}^n$ con $\lim_{t\to t_*} \vec{h}(t) = 0$, entonces tendriamos

$$\lim_{t\to t_*} \frac{\vec{f}(x_0+\vec{h}(t)) - \vec{f}(\vec{x}_0) - L(\vec{h}(t))}{|\vec{h}(t)|} = 0.$$

*) para cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ t.q.

$$0 < |\vec{h}| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\vec{f}(x_0+\vec{h}) - \vec{f}(x_0) - L(\vec{h})}{|\vec{h}|}\right| < \varepsilon.$$

Pronto veremos que tal mapa lineal L, cuando existe, sería única. Lo llamamos el diferencial de $\vec{f}$ por $\vec{x}_0$ y denotamos

$$L = d\vec{f}_{\vec{x}_0} = d\vec{f}.$$

(cuando el "puntobase" $\vec{x}_0$ es claro)

*) Cuando $\vec{f}$ es diferenciable por $\vec{x}_0$, entonces el plano tangente al gráfica de $\vec{f}$ por $(\vec{x}_0, \vec{f}(x_0))$ sería la gráfica de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $\vec{x} \mapsto \vec{x}_0 + L(\vec{x}-\vec{x}_0)$.

Ahora veremos la diferencial $d\vec{f}$ es única, por derivando su formula:

Prop: Si $\vec{f}$ es diferenciable por $\vec{x}_0$, entonces cada derivada direcional de $\vec{f}$ existe por $\vec{x}_0$, y tenemos:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = L(\vec{v}) = d\vec{f}_{\vec{x}_0}(\vec{v}).$$

En particular, en el bases estandar, la diferencial es dado por el matriz:

$L = d\vec{f}_{\vec{x}_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1} & \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

evaluadas por el punto $\vec{x}_0$.

---

demonstración: podemos elegir cualquier sendero $\vec{h} \to 0$ en la definición de diferenciable, en particular $\vec{h} = t \cdot \vec{v}$ (con $\vec{v} \neq 0$), para que la definición de diferenciable se reduce a:

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - tL(\vec{v})}{t} \iff L(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0+t\vec{v}) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{t} =$$

Ejemplo: $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(u,v)\mapsto(u^2-v^2, 2uv)$

tiene $\frac{\partial F}{\partial u}=(2u,2v)$, $\frac{\partial F}{\partial v}=(-2v,2u)$

veremos pronto ($C^1 \Rightarrow$ diferenciable) que F es diferenciable y entonces:

$$dF_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Ahora consideramos unos teoremas general sobre funciones diferenciables. Recordamos:

1ra: Escribimos $\lim_{\vec{h}\to 0} \vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) = \vec{L} = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})$

cuando para cada $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ t.q.

$|\vec{h}|<\delta \Rightarrow |\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{L}|<\varepsilon$.

2da: $\vec{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es CONTINUO por $\vec{x}_0$ cuando

$$\vec{f}(\vec{x}_0) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{f}(\vec{x}).$$

Tenemos:

$\boxed{\text{Teorema}}$ Si $\vec{f}$ es diferenciable por $\vec{x}_0$, entonces $\vec{f}$ es continuo por $\vec{x}_0$.

$\boxed{\text{dem:}}$ Notamos para $\vec{f}=(f_1,\dots,f_m):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

tenemos $\vec{f}$ continuo por $\vec{x}_0 \Leftrightarrow$ cada componente f_j continuo por $\vec{x}_0$

y: $\vec{f}$ diff. por $\vec{x}_0 \Leftrightarrow$ cada componente $f_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ diff por $\vec{x}_0$.

Entonces consideremos componente por componente. De definición de diferenciable, y límite, tenemos (suponiendo f_j diff en $\vec{x}_0$):

$$|f_j(\vec{x}_0+\vec{h}) - f_j(\vec{x}_0) - df_{j,\vec{x}_0}(\vec{h})| < |\vec{h}|$$

cuando $|\vec{h}| < \delta_1$; para algún $\delta_1 > 0$.

notar que $df_{j,\vec{x}_0}(\vec{h}) = \underbrace{\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}\right)\Big|_{\vec{x}_0}}_{\text{vector constante.}} \cdot \vec{h}$, entonces

por Cauchy-Schwarz:

$$|df_{j,\vec{x}_0}(\vec{h})| \leq \left|\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}\right)\Big|_{\vec{x}_0}\right| |\vec{h}| = C|\vec{h}|$$

algún constante $C \geq 0$. Entonces, cuando $|\vec{h}| < \delta_1$, tenemos:

$$|f_j(\vec{x}_0+\vec{h}) - f_j(\vec{x}_0)| \leq (1+C)|\vec{h}| \leq k|\vec{h}|$$

donde $k = 1 + C = \text{cst}$. Entonces $|f_j(\vec{x}_0+\vec{h}) - f_j(\vec{x}_0)| \to 0$ cuando $|\vec{h}| \to 0$, es decir

$$\lim_{\vec{h}\to 0} f_j(\vec{x}_0+\vec{h}) = f_j(\vec{x}_0)$$; ó que f_j es continuo en $\vec{x}_0$. $\square$

Ejemplo: Ahora sabemos cada función diferenciable tiene que ser continuo. En particular un punto de discontinuidad NO puede ser un punto diff.

En particular podemos considerar el siguiente función raro que muestra la diferencia entre diferenciable y derivados direccional:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

verificamos que este funcion tiene derivadas direccional (en cualquier dirección) por $x=y=0$, pero no es diferenciable por $x=0, y=0$ (de hecho, ni esta continuo por $x=y=0$):

- $\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2v_1 v_2^2}{v_1^2+t^2v_2^4} = \begin{cases} \frac{2v_2^2}{v_1} ; v_1\neq 0 \\ 0 ; v_1=0 \end{cases}$

derivadas direccional

- pero $\lim_{t\to 0} f(t^2,t) = \lim_{t\to 0} \frac{2t^4}{t^4+t^4} = 2 \neq f(0,0)=0$ (f no es continuo por $x=y=0$).

La teorema valor medio tiene gran utilidad en cálculo 1-variable. Su generalización a varias variables tenemos como:

$\boxed{\text{Teorema (valor promedio):}}$ Para $\vec{f}=(f_1,..,f_m):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ diferenciable a lo largo el segmento de $\vec{x}_0$ a $\vec{x}_0+\vec{h}$, entonces existe $s_1, s_2, ..., s_m \in [0,1]$ tal que:

$$\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0) = \left(df_{1,\vec{x}_0+s_1\vec{h}}(\vec{h}), \dots, df_{m,\vec{x}_0+s_m\vec{h}}(\vec{h})\right).$$

---

dem: Estableceremos componente por componente.

por $\varphi(t) := f_j(\vec{x}_0+t\vec{h})$.

Entonces $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ es diferenciable porque f_j es (a lo largo $\vec{x}_0 \to \vec{x}_0+\vec{h}$). Teorema valor promedio en 1-variable aplica a φ para que:

$\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(s_j)$ algún $s_j\in[0,1]$.

ahora, de la definición de derivada direccional (y que f_j es diferenciable) tenemos que

$$\varphi'(s_j) = \text{der. direccional de } f_j \text{ por } \vec{x}_0 + s_j\vec{h} \text{ en dir. de } \vec{h}$$

$$= df_{j,\,\vec{x}_0+s_j\vec{h}}(\vec{h}). \qquad \square$$

Con el teorema de valor promedio, podemos demostrar:

Teorema (parciales mixtas): Si las derivadas parciales $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}$ existen y son continuas

y también las parciales mixtas $\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_k \partial x_j}$ existen y son continuas, entonces son iguales: $\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_k \partial x_j}$.

---

dem: Sin perder generalidad consideramos $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$.

Queremos mostrar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0+k) + f(x_0,y_0)}{hk}$$

es igual a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0+k) - f(x_0+h,y_0) + f(x_0,y_0)}{hk}$$

donde el orden de limites intercambia. Ponemos

$G(x) := f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$

y tenemos (teorema val. promedio):

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - (f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0))$$

$$= G(x_0+h) - G(x_0) = h\, G'(x_0 + sh)$$

algún $s \in [0,1]$. NOTAMOS que

$$G'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = k \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y_0 + Sk)$$

~~en~~ algún $S \in [0,1]$ (valor promedio de nuevo) para que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \lim_{k \to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + sh, y_0 + Sk)$$

algún $s, S \in [0,1]$, eso es (porque $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ es continuo):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$ como deseamos. □

NOTACIÓN/Definición: Un función cuyos derivadas parciales (de 1'er orden):

$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}$ existen y son continuos se denota por un función tipo C^1 (funciones continuos por C^0). Cuando las derivadas parciales de orden k existen ($\frac{\partial^k \vec{f}}{\partial x_1 \ldots \partial x_k}$ p.ej.) y son continuos digamos el función es tipo C^k, y cuando parciales de cualquier orden existen digamos el función es suave, denotado C^∞.

Teorema: Un función $\mathcal{C}^1$ (parciales existen, y continuos) es diferenciable.

dem: apliquaremos teorema valor promedio repetidamente para tener (cada componente):

$$f(\vec{x}+\vec{h}) = f(x_1+h_1, \dots, x_n+h_n)$$

$$= f(x_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+s_1h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)$$

$$= \dots$$

$$= f(\vec{x}) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+s_1h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)$$

$$+ h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2+s_2h_2, x_3+h_3, \dots, x_n+h_n)$$

$$+ \dots$$

$$+ h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n+s_nh_n)$$

algunos $s_1, \dots, s_n \in [0,1]$. Entonces:

$$f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) - \dots - h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})$$

$$= h_1 \Delta_1 + h_2 \Delta_2 + \dots + h_n \Delta_n$$

para $\Delta_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+s_1h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots,$

$$\Delta_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n+s_nh_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}).$$

Debido a $f \in \mathcal{C}^1$ ($\frac{\partial f}{\partial x_j}$ continuo), tenemos $\Delta_j \to 0$ mientras $\vec{h} \to 0$, entonces $\frac{h_j \Delta_j}{|\vec{h}|} \to 0$ mientras $\vec{h} \to 0$ $\left(\frac{h_j}{|\vec{h}|} \in [-1,1]\right)$, que dice f es diferenciable. $\square$.