§6: Regla Cadena, Jacobianos

Si re-arreglamos el limite en la definición de diferenciable en la siguiente manera:

$$\boxed{\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + d\vec{f}_{\vec{x}_0}(\vec{h}) + |\vec{h}|\mathcal{E}(\vec{x}_0,\vec{h})}$$

donde $\lim_{\vec{h}\to 0} \mathcal{E}(\vec{x}_0,\vec{h}) = 0$, vemos el rol del diferencial como aproximación lineal (ó 1'er orden expansion) al función en manera más aparente. Tales expansiones, que también encontramos para funciones $\mathcal{C}^1$ usando teorema valor medio, son útil para derivar unos útiles formulas (ó al menos para motivarlo: si un formula "tiene sentido" al 1'er orden, tipicamente podemos demonstrar que tal propiedades quedan validos rigorosamente de las definiciones).

Queremos aquí derivar (1) la util regla de cadena para calcular diferenciales de composiciones de transformaciones. Despues explicaremos y motivemos la teorema de funciones implicitas, y la relevancía de Jacobianos (determinantes de diferenciales) en calculando volumenes bajo transf. de variables.

Teorema (Cadena): Para $\vec{f}: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$, $\vec{g}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^l$, y $\vec{g}$ es diferenciable en $\vec{f}(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^m$, entonces, su composición:

$\vec{g}\circ\vec{f}:\mathbb{R}^{\ell}\longrightarrow\mathbb{R}^{n}$, es diferenciable en $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^{\ell}$. Además su diferencial está:

$$d(\vec{g}\circ\vec{f})_{\vec{x}_0}=d\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)}\circ d\vec{f}_{\vec{x}_0}:\mathbb{R}^{\ell}\longrightarrow\mathbb{R}^{n}$$

para las aplicaciones lineales:

$d\vec{f}_{\vec{x}_0}:\mathbb{R}^{\ell}\to\mathbb{R}^{m}$, $d\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)}:\mathbb{R}^{m}\to\mathbb{R}^{n}$.

---

demostración: escribimos las expansiones:

$$(\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{x}_0+\vec{h})=\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}))=\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0)+\vec{H})$$

$$=(\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{x}_0)+d\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)}(\vec{H})+|\vec{H}|\mathcal{E}_g(\vec{x}_0,\vec{H})$$

donde $\vec{H}=d\vec{f}_{x_0}(\vec{h})+|\vec{h}|\mathcal{E}_f(\vec{x}_0,\vec{h})$, por lo que tenemos:

$$(\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{x}_0+\vec{h})=(\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{x}_0)+d\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)}\circ d\vec{f}_{\vec{x}_0}(\vec{h})+|\vec{h}|\mathcal{E}(\vec{x}_0,\vec{h})$$

con $\mathcal{E}=d\vec{g}_{\vec{f}(\vec{x}_0)}(\mathcal{E}_f(x_0,\vec{h}))+\mathcal{E}_g(x_0,\vec{H})(\mathcal{E}_f(x_0,\vec{h})+d\vec{f}_{\vec{x}_0}(\hat{h}))$

tiene límite 0 para $\vec{h}\to 0$ en notar que $\vec{H}\to 0$ para $\vec{h}\to 0$ y $\mathcal{E}_f\to 0$, $\vec{h}\to 0$ y $\mathcal{E}_g\to 0$, $\vec{H}\to 0$. $\square$

Ejemplos:

(1) $\mathbb{R}\xrightarrow{c}\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}$

$t\longmapsto(x(t),y(t))\longmapsto f(x(t),y(t))$.

tenemos, por t_0 (asumiendo todo es diferenciable):

$$\mathbb{R} \xrightarrow{dc_{t_0}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{df_{c(t_0)}} \mathbb{R}$$ por las matrices:

$$\begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix}, \; y, \; \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(x(t_0),y(t_0))},$$ entonces

$$df_{c(t_0)} \circ dc_{t_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x(t_0),y(t_0))} \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x(t_0),y(t_0))} \cdot y'(t_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} f(x(t),y(t))$$

que tambien se escribe por corto:

$$\frac{d}{dt} f(x(t),y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y'.$$

Notamos que tambien podemos verificar con valor promedio, expandiendo como (funciones C^1):

$$f(x(t+h),y(t+h)) = f(x(t)+hx'(t_1), y(t)+hy'(t_2))$$

$$= f(x(t), y(t)+hy'(t_2)) + hx'(t_1) f_x(x(t)+h_1x'(t_1), y(t)+hy'(t_2))$$

$$= f(x(t),y(t)) + h\left[x'(t_1)f_x(x(t)+h_1x'(t_1), y(t)+hy'(t_2)) + y'(t_2) f_y(x(t), y(t)+h_2y'(t_2))\right]$$

donde $t_1 = t+s_1h$, $t_2 = t+s_2h$ algún $s_1, s_2 \in [0,1]$, y $h_1, h_2 \in [0,h]$. Entonces vemos explicitamente que

$$\frac{f(x(t+h),y(t+h)) - f(x(t),y(t))}{h} \to \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x(t),y(t))} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x(t),y(t))} y'(t)$$

cuando $h \to 0$.

(2) $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\vec{F}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v)) \mapsto f(x(u,v), y(u,v))$

$$d(f\circ\vec{F})_{(u,v)} = df_{\vec{F}(u,v)} \circ d\vec{F}_{(u,v)} \quad \text{donde:}$$

$$d\vec{F}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} & \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right|_{(u,v)} \quad , \; y,$$

$$df_{(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) \quad , \text{ para que:}$$

$$d(f\circ\vec{F})_{(u,v)} = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(u,v),y(u,v))} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x(u,v),y(u,v)} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \Bigg\| \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(u,v),y(u,v))} \frac{\partial x}{\partial v} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x(u,v),y(u,v))} \frac{\partial y}{\partial v} \right)$$

ó por corto:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} f(x(u,v), y(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} f(x(u,v), y(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} . \end{cases}$$

JACOBIANO: Para transformaciones $\vec{f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciables, su diferencial (también llamamos MATRIZ JACOBIANO) es cuadrado: $n \times n$. Su determinante es llamado el Jacobiano, del transformation.

Por Ejemplo:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\vec{F}} \mathbb{R}^2$$

$$(u,v) \longmapsto (u^2-v^2, 2uv) = (x(u,v), y(u,v)) = \vec{F}(u,v)$$

tenemos: $$d\vec{F}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\Bigg|_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}$$

y su JACOBIANO es el función ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$):

$$J(\vec{F})\big|_{(u,v)} = \det(d\vec{F}_{(u,v)}) = 4(u^2+v^2).$$

$$\left(= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right).$$

NOTACIÓN: dado $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

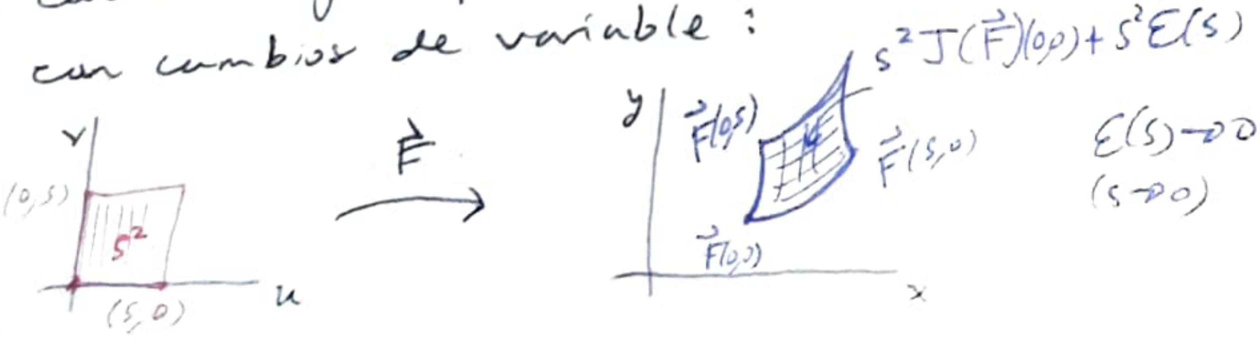
escribimos $J(\vec{f}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por su

JACOBIANO: $J(\vec{f})(\vec{x}) = \det(d\vec{f}_{\vec{x}})$.

De regla cadena y que determinante es multiplicitiva ($\det AB = \det A \det B$), tenemos

$$J(\vec{f} \circ \vec{g}) = \left[J(\vec{f})\circ\vec{g}\right]\left(J(\vec{g})\right)$$

Jacobianos son relevantes cuando comenzamos cálculo integral para calcular areas/volumenes con cambios de variable:



un paralelogramo (cuadrado) con area s^2 (vertices $(0,0), (s,0), (0,s)$) se transforma a un región que es "aproximada" mientras $s \to 0$ por un paralelogram con vertices $\vec{F}(0,0), \vec{F}(s,0), \vec{F}(0,s)$, cuyo area es (para $\vec{F}$ diferenciable):

$$\det\left(\vec{F}(s,0)-\vec{F}(0,0), \vec{F}(0,s)-\vec{F}(0,0)\right)$$

$$= \det\left(s\frac{\partial \vec{F}}{\partial u} + s\mathcal{E}_1, s\frac{\partial \vec{F}}{\partial v} + s\mathcal{E}_2\right) \quad (\mathcal{E}_k(s) \to 0 \text{ mientras } s \to 0).$$

$$= s^2\left(J(\vec{F})(0) + \mathcal{E}(s)\right) \quad \text{donde } \mathcal{E}(s) \to 0 \text{ mientras } s \to 0$$

y la misma computación en general conduce a el volumen del n-paralelopiped con vertices $\vec{x}_0, \vec{x}_0 + se_1, \dots, \vec{x}_0 + se_n$ (s^n) y el transforma al n-paralelopiped con vertices $\vec{F}(\vec{x}_0), \vec{F}(\vec{x}_0+se_1), \dots, \vec{F}(\vec{x}_0+se_n)$ sea de la forma:

$$s^n \cdot J(\vec{F})(\vec{x}_0) + s^n \mathcal{E}(s) \quad \left[\text{con } \lim_{s \to 0} \mathcal{E}(s) = 0\right].$$

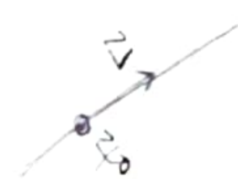
---

* Notación: en lugar de $d\vec{f}_{\vec{x}_0}$ para la diferencial de $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

también la notación $D\vec{f}(\vec{x}_0) = d\vec{f}_{\vec{x}_0}$ es común.

Su valor en un vector $(\vec{v} \in \mathbb{R}^n)$ es denotado comunmente también como:

$$D_{\vec{v}}\vec{f}(\vec{x}_0) = d\vec{f}_{\vec{x}_0}(\vec{v})$$



que significa derivada $\vec{f}$ en la dirección $\vec{v}$ por el punto $\vec{x}_0$.