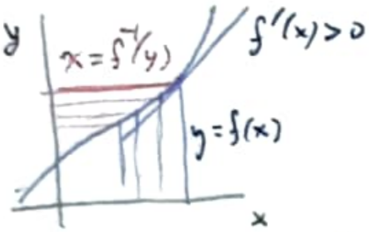
§7: Teorema Función Inverso, Implícita

Clue la diferencial de un función esta un aproximación lineal a tal función, esperamos que propiedades de la diferencial (matriz Jacobiana) siguen cierto en algún sentido para la función a que se aproxima.

Por ejemplo en cálculo 1-variable tenemos teorema de función inversa:



para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciable (C^1) con $f'(x_0)\neq 0$, entonces existe algún intervalo $(x_0-\delta, x_0+\delta)\ni x_0$ alrededor x_0 t.q. la restricción $f:(x_0-\delta, x_0+\delta)\to f(x_0-\delta, x_0+\delta)$ es invertible (bijectiva). Además la derivada del inverso esta dado por:

$$\left[\ (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)} \quad \text{donde } y=f(x)\ \right].$$

En dimensión general:

$\boxed{\text{Teorema (función inverso):}}$ Para $\vec{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, una transformación C^1, tal que $d\vec{f}_{\vec{x}_0}$ es invertible algún $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ ($J\vec{f}(\vec{x}_0)\neq 0$).

Entonces existe un barrio alrededor de $\vec{x}_0$ (p.ej. una bola centrado por $\vec{x}_0$), tal que la restricción de $\vec{f}$ a esta barrio es

invertible. Además, su inverso es diferenciable con:
$$d(\vec{f}^{-1})_{\vec{y}_0} = (d\vec{f}_{\vec{x}_0})^{-1}, \text{ para } \vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0).$$

Demostrar esta teorema es involucrada (difícil), una tema por curso de análisis. Notamos que aceptando la existencia de inverso de $\vec{f}$ (p.ej si $\vec{f}$ es invertible) y su diferenciabilidad, podemos ver su diferencial sería dado por la formula arriba usando regla de cadena:

$$(\vec{f}^{-1} \circ \vec{f})(\vec{x}) = \vec{x} \Rightarrow$$

$$d(\vec{f}^{-1})_{\vec{f}(\vec{x})} \cdot d\vec{f}_{\vec{x}} = d(Id)_{\vec{x}} = Id$$

$$\Rightarrow (d\vec{f}_{\vec{x}})^{-1} = d(f^{-1})_{\vec{f}(\vec{x})}.$$

Similar (de hecho equivalente) al teorema función inverso es teorema función implícita. Estamos acostumbradas a ciertas situaciones de funciones implícitas:

1) una "curva plana implícita" sería dada por un expresión $f(x,y)=0$ como un conjunto de nivel. dado la formula para curva implícita podemos entenderlo como curva en resolver por 'y' (por ejemplo) para tener algo como $y = g(x) \Leftrightarrow f(x, g(x)) = 0$

La curva implícita es "regular" cuando

podemos extraer su forma local como algún gráfica: existe g, h t.q:

$$f(x,y)=0 \iff \begin{cases} y=g(x) \\ \text{ó} \\ x=h(y) \end{cases}.$$

---

2) Similarmente una superficie implícita, como conjunto $f(x,y,z)=0$, lo consideramos regular cuando podemos resolver alrededor un punto como una gráfica sobre algún plano coordenada ($z=F(x,y)$, ó $y=G(x,z)$, ó $x=H(y,z)$ en $f(x,y,z)=0$).

---

3) En general nos interesa condiciones para cuando dado una sistema de ecuaciones:

$$f_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0$$
$$f_2(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0$$
$$\vdots$$
$$f_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0$$

estamos justificado concluir que podríamos 'resolver' tales ecuaciones para determinar las y_j's en términos de las x_k's:

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ y_m = g_m(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$ satisfaciendo:

$$f_1(\vec{x},\vec{g}(\vec{x}))=0,\dots,f_m(\vec{x},\vec{g}(\vec{x}))=0.$$

Ejemplos:

1) $f(x,y) = x^2+y^2+1$

→ no existe ningún solución (ni un $y=g(x)$ real)

2) $f(x,y) = (x+y^2e^y)(y-\cos x)$

→ dos curvas extraído como gráficas

$x = -y^2e^y$ ó $y = \cos x$.

determinar en cual curva estamos (cual 'rama') requiere precisar un punto inicial sobre la curva implícita.

Teorema (función IMPLÍCITA): Para $\vec{f}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$,
$(\vec{x},\vec{y})\longmapsto\vec{f}(\vec{x},\vec{y})$,
una función C^1, tal que:

$$d\vec{f}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)} = \left(\underbrace{\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_n}}_{\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{x}}} \quad \underbrace{\frac{\partial\vec{f}}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial\vec{f}}{\partial y_m}}_{\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}}} \right)\Bigg|_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)}$$

tiene $$\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}}\Big|_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}\Bigg|_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)}$$ invertible

entonces existe un aplicación única:

$\vec{g}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$, C^1 en algún barrio de $\vec{x}_0$

con: ① $\vec{g}(\vec{x}_0)=\vec{y}_0$, y, ② $\vec{f}(\vec{x},\vec{g}(\vec{x}))=0$

para $\vec{x}$ en el dominio de $\vec{g}$.

Por cierto, cuando la condición de no-degeneridad $\det\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}\right) \neq 0$, las ecuaciones $\vec{f}(\vec{x},\vec{y}) = 0$

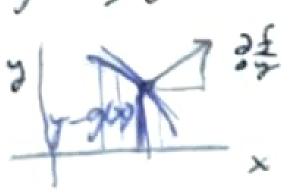
determinan $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$, como una solución.

Nota: cuando $n=0$ la teorema función implícita implica la teorema función inverso. Similar, uno puede deducir teorema función implícita de teorema función inverso en aplicando á

$$\vec{F}(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{f}(\vec{x},\vec{y})) \; ; \; \vec{F} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}.$$

Ejemplos:

1) Para $f(x,y)=0$ una curva implícita, dado x_0, y_0 t.q. $f(x_0,y_0)=0$, y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ entonces existe $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido en algún intervalo alrededor x_0 con $g(x_0)=y_0$, y, $f(x, g(x)=y) = 0$ para x en el dominio de g.



$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ (no horizontal, ya que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ es normal)

2) Para $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, $z = h(u,v)$ pensamos como parametrizar algún superficie. $\left[\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \mapsto (f(u,v), g(u,v), h(u,v)) \end{array} \right]$. Estaremos seguro que parametriza un superficie regular cuando por ejemplo, los primeros dos ecuaciones podemos invertir para tener:

$u = F(x,y)$, $v = G(x,y)$

inverso al $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$.

En caso que sí, tendríamos la superficie como gráfica $z = H(x,y) = h(F(x,y), G(x,y))$. Por teorema función inversa sabemos las dos primeras ecuaciones tendrán tal inversa en los puntos donde:

$$0 \neq \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}$$

; eso es donde el Jacobiano de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(u,v) \longmapsto (f(u,v), g(u,v)) = (x,y)$

<u>no</u> <u>anula</u>.

similarmente, en caso $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$, ó,

$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$ la superficie sería regular.

La condición para que nuestra parametrización traza un superficie regular podemos resumir con:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial u}\right) \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial v}\right) \neq (0,0,0).$$

[los dos vectores $\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial v}\right)$ independientes dirigan el plano tangente].

Notación: Para $f_1(x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_m), \dots, f_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ es común escribir/encontrar la notación:

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$