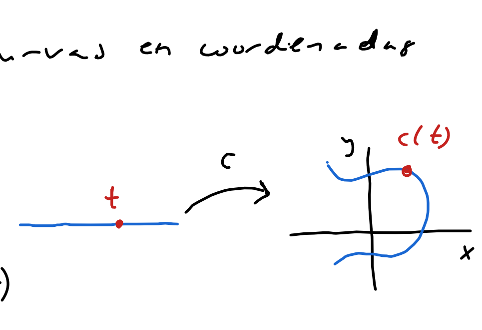
§8: Curvas Regular

Comunmente, describimos curvas en coordenadas por una parametrización:

$$\begin{cases} c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto (x_1(t), \dots, x_n(t)) = c(t) \end{cases}$$



ó, tambien podemos describirlos implicitamente con algun formulas/conjunto nivel [elimina parametro t]:

$$\left[f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \ \dots, \ f_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \right.$$

es decir $\vec{f}^{-1}(0)$ algún $\vec{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$.

Comentarios:

1) Si no mencionamos al contrario, consideramos funciones suaves (C^∞).

2) Geometricamente, el objeto de interes principal es la traza $[\operatorname{im}(c) = \{c(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n]$ ó lugar geometrical $[\{\vec{x} : \vec{f}(\vec{x}) = 0\} \subset \mathbb{R}^n]$, que es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de puntos en la curva. Las varias parametrizaciones ó formulas implicitas que definan la misma lugar geometrical son de interes segundaría en que lo usamos como herramienta para entender la geometría de la curva.

3) Principalmente enfocaremos en curvas planares ($n=2$) y despues curvas espaciales ($n=3$).

En general un función arbitraría $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, no tiene que trazar una "curva" en el sentido comun que tenemos en mente. Por ejemplo:

- *) $c(t) \equiv 0$ es constante, solo traza un punto.
- *) en bajar nuestros condiciones de regularidad (C^∞), á solo continuo, existe funciones continuos (CURVA DE PEANO) $c : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con imagen todo el cuadrado $[0,1] \times [0,1] = \operatorname{im}(c)$.

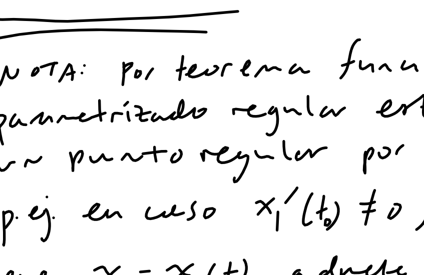
Entonces es necesario requerir algunos condiciones adicional sobre un parametrización/conjunto nivel para que su traza/lugar geometrical corresponde a un curva "regular" como tenemos en mente:

Def: Un curva parametrizada $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de clase al menos C^1, tiene $c(t_0)$ por un PUNTO REGULAR cuando $c'(t_0) \neq 0$. Decimos tal parametrización es regular cuando es regular por cada punto. Un punto $c(t_0)$ que no es regular ($c'(t_0) = 0$) llamamos un PUNTO SINGULAR de la parametrización.

NOTA: Por teorema función inverso de 1-variable, una curva parametrizado regular esta dado localmente alrededor un punto regular por algún gráfica.

p.ej. en caso $x_1'(t_0) \neq 0$, teorema función inversa implica que $x_1 = x_1(t)$ admete un inverso alrededor t_0: $t = \varphi(x_1)$, y entonces la curva regular $x_1(t), \dots, x_n(t)$ traza alrededor t_0 una gráfica sobre eje x_1:

$$x_1, \ x_2 = f_2(x_1) = x_2(\varphi(x_1)), \ \dots, \ x_n = f_n(x_1) = x_n(\varphi(x_1)).$$



$$\{(x_1, \vec{f}(x_1)) : x_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$

Similarmente, para curvas implicitas $\vec{f}^{-1}(0)$, con $\vec{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ de clase al menos C^1, llamamos $\vec{x}_0 \in \vec{f}^{-1}(0)$ un punto regular cuando $d\vec{f}_{\vec{x}}$ tiene rango $n-1$ [aplicación lineal suryectiva], y el conjunto nivel $\vec{f}^{-1}(0)$ regular cuando cada $\vec{x}_0 \in \vec{f}^{-1}(0)$ es regular.

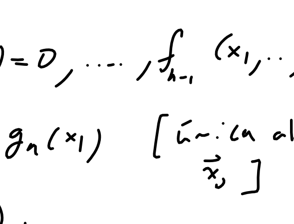
Por teorema función implícita, alrededor un punto regular, el conjunto nivel $\vec{f}^{-1}(0)$ esta dado localmente por algún grafica sobre un eje.

p.ej. en caso $d\vec{f}_{\vec{x}_0} = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1} \ \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_2} \ \cdots \ \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n} \right)_{\vec{x}_0} \Big\} n-1$

tiene $\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n} \right)_{\vec{x}_0}$ invertible, la teorema función implicita implica que la sistema $f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = 0$ tienen solución: $x_2 = g_2(x_1), \dots, x_n = g_n(x_1)$ [única alrededor $\vec{x}_0$] que esta forma curva grafical: $(x_1, \vec{g}(x_1))$.

Ejemplos:

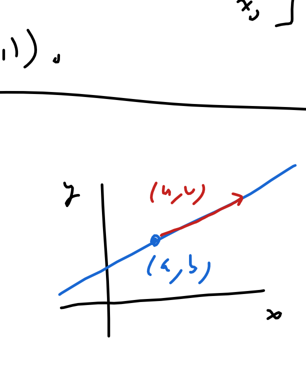
1) $x = a + ut$, $y = b + vt$ para a, b, u, v constantes.



Cuando u, v no son ambos cero ($u^2 + v^2 \neq 0$) tenemos una parametrización regular, trazando una linea.

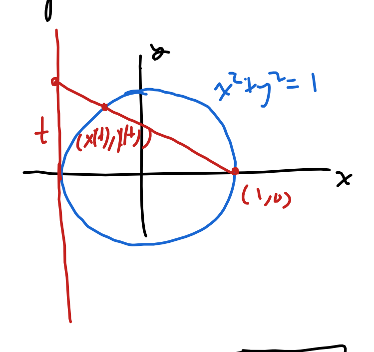
2) Un círculo: $x^2 + y^2 = 1$ podemos parametrizar con funciones trigonometricas:

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta$$

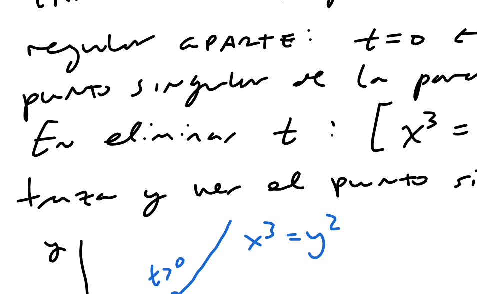


Tambien el círculo admete la parametrización racional:

$$x = \frac{t^2 - 4}{t^2 + 4}, \quad y = \frac{4t}{t^2 + 4}$$



en considerar p.ej. los triangulos similares:



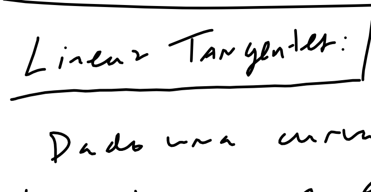
$$\Rightarrow \frac{y}{t} = \frac{1-x}{2} = \frac{\sqrt{2(1-x)}}{\sqrt{t^2+4}}$$

*) NOTA: la última parametrización racional traza todo el circulo aparte el punto $x=1, y=0$ que corresponde a $t \longrightarrow \pm\infty$.

3) $x = t^2$, $y = t^3$

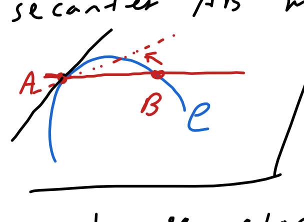
tiene $x' = 2t$, $y' = 3t^2$, entonces todos puntos son regular APARTE: $t = 0 \longleftrightarrow x = y = 0$ que es el unico punto singular de la parametrización.

En eliminar t: $[x^3 = y^2]$ podemos dibujar la traza y ver el punto singular como un CUSPIDE:



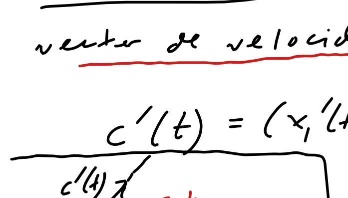
Lineas Tangentes:

Dado una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$, describimos su linea tangente por $A \in \mathcal{C}$ como la linea limite de los secantes $\overleftrightarrow{AB}$ mientras $B \in \mathcal{C}$ limite hacía A ($B \to A$):



Para una curva trazado por un parametrización regular, su linea tangente por $c(t)$ seria direccionado por el vector de velocidad:

$$c'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h}$$



Entonces, la linea tangente a una curva parametrizada regular por $c(t)$ es:

$$c(t) + \operatorname{span}\{c'(t)\}$$

ó la linea parametrizado por $\mathbb{R}$

$$s \longmapsto c(t) + s\,c'(t).$$

Para una curva planar implicita Regular:

$$f(x, y) = 0 \qquad \left[\operatorname{con} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \neq (0,0) \right]$$

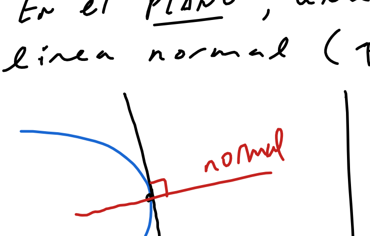
tenemos su linea tangente por $(x_0, y_0) \in f^{-1}(0)$ como la linea por (x_0, y_0) normal a $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)\Big|_{(x_0,y_0)}$:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0) = 0 \right]$$

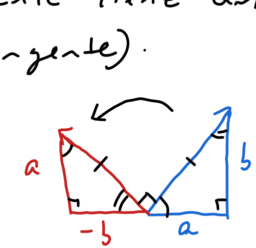
que se puede establecer con regla de cadena.

Linea Normal:

En el PLANO, una curva con tangente tiene única linea normal (perpendicular al tangente).



Recordamos que:



$(a, b) \longmapsto (-b, a)$

gira el vector $\vec{v} = (a, b)$ por $\pi/2$ en sentido anti-horario, entonces dado una curva planar parametrizado (regular):

$$t \longmapsto c(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

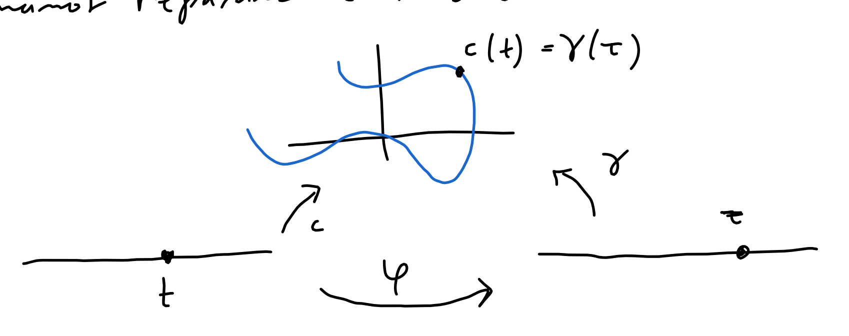
el vector $c'(t) = (x'(t), y'(t))$ dirige el tangente por $c(t)$ y el vector:

$$(-y'(t), x'(t))$$

dirige el normal en $c(t)$.

Reparametrización:

La misma curva como lugar geometrical admetirá varias parametrizaciones que se trazan. Dos curvas parametrizadas que trazan el mismo lugar geometrical llamamos reparametrizaciones de una al ~~otra~~.



(*) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(t) = \tau \Leftrightarrow c(t) = \gamma(\tau)$.

Más preciso, consideramos reparametrización como un caso de cambio de variable:

Def: Dado una curva parametrizado:

$$c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

llamamos $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una reparametrización de c cuando existe una bijeción:

$$\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$$

tal que: $\gamma = c \circ \varphi$

La reparametrización es regular cuando φ esta diferenciable, y $\varphi' \neq 0$.

Entonces un reparametrización consiste en un substitución/cambio de variable del parametro 't':

$$c(t), \ t = \varphi(\tau) \rightsquigarrow \gamma(\tau) = c(\varphi(\tau)).$$

Ejemplo: $x = t$, $y = t$ es parametrización regular de la linea $y = x$. La reparametrización $t = \varphi(\tau) = \tau^3$ traza la misma linea

$$x = \tau^3, \quad y = \tau^3$$

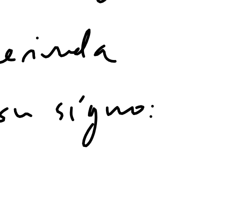
pero no es regular por $\tau = 0 \leftrightarrow t = 0 \longleftrightarrow x = y = 0$.

Las propiedades geometrical de una curva trazado por algún parametrización son los que serian independiente de la elección/manera en que decidimos parametrizarlo. Es decir nos interesa mas en propiedades de curvas que son invariante bajo reparametrizaciones.

Por ejemplo, la linea tangente es independiente de la parametrización regular debido a regla de cadena:

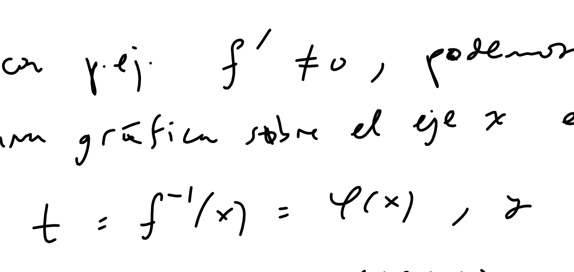
$$\gamma'(\tau) = c'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau) \qquad [t = \varphi(\tau), \ \gamma = c \circ \varphi]$$

son multiples para que su 'span' no cambia.



Podemos usar regla de cadena sobre reparametrización de una curva parametrizado como una gráfica para obtener información util en dibujar ó bosquejar la traza del curva (planar).

Recordamos que para una grafica $(x, y(x))$ vemos $dy/dx = y'$ como el pendiente de la gráfica (creciendo/descreciendo), y la 2da derivada $d^2y/dx^2 = y''$ como su concavidad por su signo:



Ahora dado un curva planar (regular) parametrizado

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

con p.ej. $f' \neq 0$, podemos reparametrizarlo como una gráfica sobre el eje x en tomando:

$$t = f^{-1}(x) = \varphi(x), \ y$$
$$y = G(x) = g(\varphi(x)).$$

Usando regla de cadena, encontramos los pendientes y concavidad (d^2y/dx^2) de la traza por las formulas:

(*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g'}{f'} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$

(*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{f'g'' - f''g'}{(f')^3} = \dfrac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$

que son utiles formulas para dibujar trazas de curvas parametrizadas regular con mas precisión.