§9: Longitud del Arco

* comentario: si no decimos al contrario, por "curva" significa una curva parametrizada, suave, y regular. *

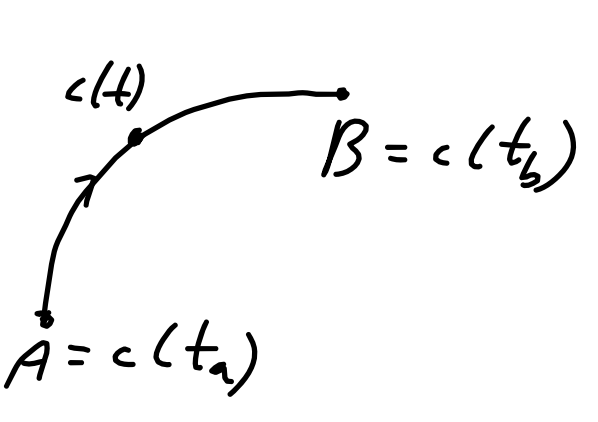
Ahora consideramos:

1er) como definimos longitud de un Arco

2da) como calcular tales longitudes.

Para el paso 1er, definaremos longitudes con aproximaciones polygonal del arco. En pasar al limite veremos que el longitud de un arco trazado por un parametrización regular esta dado por el integral:

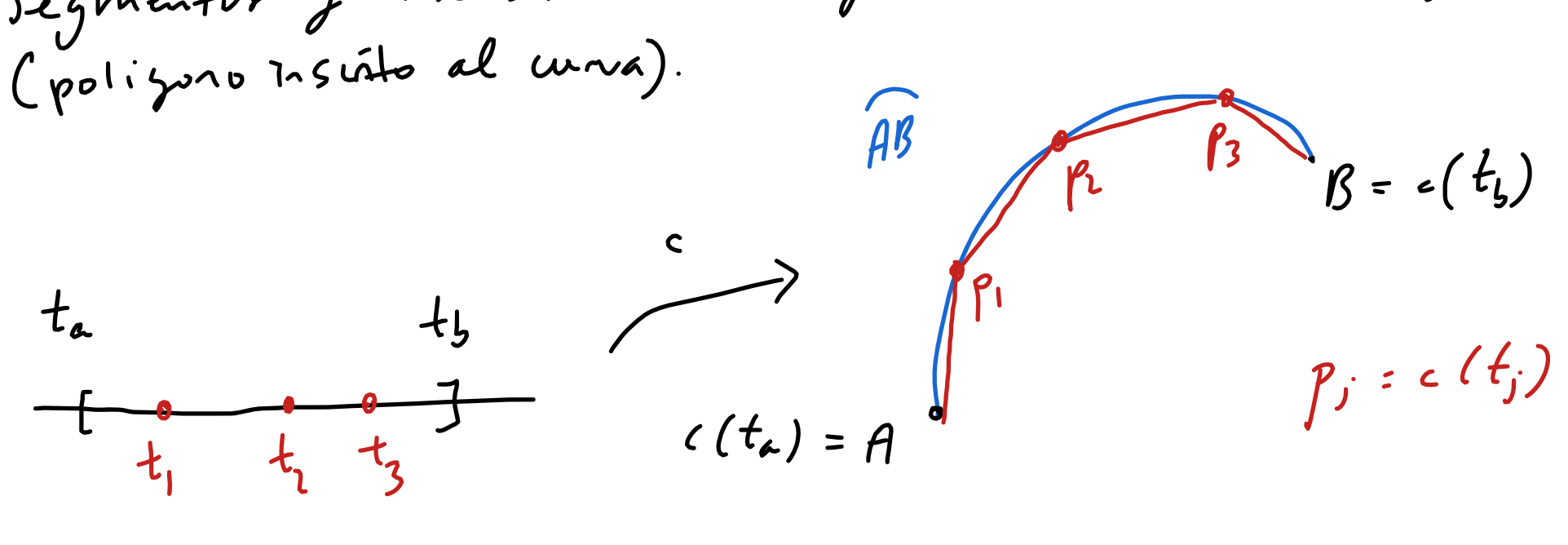
$$|\widehat{AB}| = \int_{t_a}^{t_b} |c'(t)|\, dt$$



que reduce el parte 2da a cálculos integrales 1-variable.

Para definir longitudes de arcos, consideramos un arco orientado del punto A á punto B; $\widehat{AB}$; trazado p.ej. con algún parametrización regular bijectiva $c:[t_a,t_b]\longrightarrow \widehat{AB}\subset\mathbb{R}^2$.

Estimamos el longitud de tal arco en dividirlo por segmentos y añadir las longitudes de tales segmentos (poligono inscrito al curva).



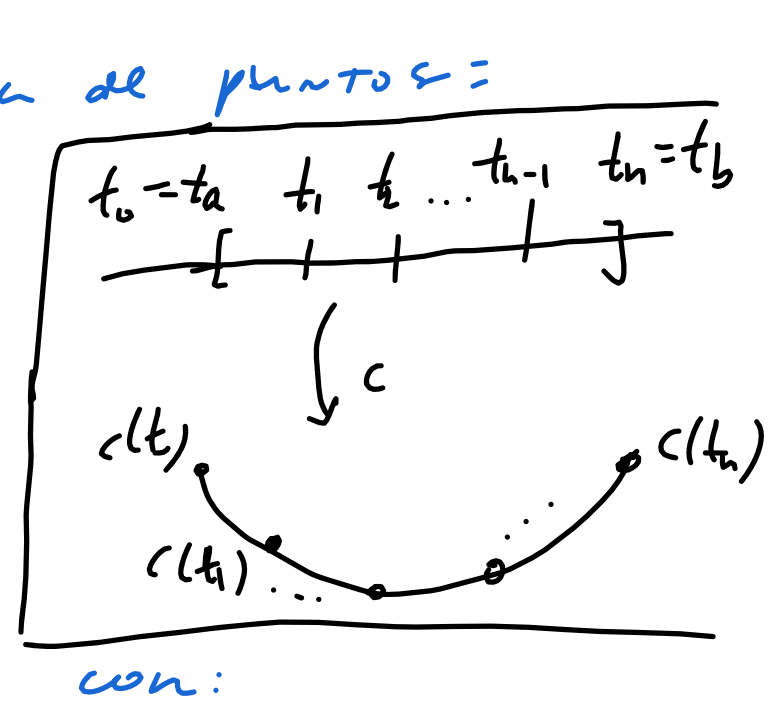
$$|\widehat{AB}| \approx |P_1-A| + |P_2-P_1| + |P_3-P_2| + |B-P_3|$$
$$= |c(t_1)-c(t_a)| + |c(t_2)-c(t_1)| + |c(t_3)-c(t_2)| + |c(t_b)-c(t_3)|.$$

Esperamos que cuando la división/partición de la curva se va mas FINA [la distancia entre puntos sucesivas de la división tiende a cero] que la suma de longitudes (longitud poligona inscrito) va a tener valor limite convergiendo al nuestro longitud de arco.

Mas preciso, tenemos las definiciones:

Def: Para $c:[t_a,t_b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$, injectiva, y al menos continuo, llamamos una partición ó division del arco: $\mathrm{im}(c)$, un secuencia finita de puntos:

$$t_a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = t_b$$



que denotamos por:

$$\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}.$$

el tamaño del partición medimos con:

$$|\mathcal{P}| = \max\{t_j - t_{j-1} : j = 1,\dots,n\}$$

A cada partición asignamos la longitud del polígono inscrito:

$$\ell(\mathcal{P},c) := \sum_{j=1}^{n} |c(t_j)-c(t_{j-1})|$$

Ahora tenemos el lenguaje para definir longitud:

Def: Decimos $c:[t_a,t_b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$, inyectiva, y continuo se traza un arco RECTIFICABLE cuando para cualquier secuencia de particiones

$$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \dots$$

de $[t_a,t_b]$ con $|\mathcal{P}_k|\longrightarrow 0$, mientras $k\to\infty$, entonces la secuencia de longitudes de polígonos inscritos:

$$\ell_k := \ell(\mathcal{P}_k, c)$$

es convergente (tiene limite) mientras $k\to\infty$.

Sigue de las definiciones que en caso $c:[t_a,t_b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ se traza un arco rectificable, entonces el limite ℓ_k en la definición es necesariamente independiente de la secuencia $\mathcal{P}_k$ de particiones elegidos. Este valor común es, por definición, el longitud del arco:

$$|\widehat{AB}| := \lim_{k\to\infty} \ell_k$$

La siguiente teorema conduce a muchos ejemplos de arcos rectificables, y nos da una formula para la computación de su longitud:

Teorema: Para $c:[t_a,t_b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ de clase C^1, y inyectiva, entonces c se traza un arco rectificable con longitud por la integral: $\int_{t_a}^{t_b} |c'(t)|\,dt$.

---

demonstración (sketch): para delinear la demonstración en general considera algún partición

$$\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N\}$$

de $[t_a,t_b]$ $(t_0 = t_a, y, t_N = t_b)$.

De teorema valor medio aplicando a cada componente de $c(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$, tenemos:

$$x_1(t_j) - x_1(t_{j-1}) = x_1'(s_{1,j})\cdot(t_j - t_{j-1})$$
$$\vdots$$
$$x_n(t_j) - x_n(t_{j-1}) = x_n'(s_{n,j})\cdot(t_j - t_{j-1})$$

algunos $s_{k,j}\in[t_{j-1},t_j]$ $(k = 1,\dots,n$ y $j = 1,\dots,N)$

Entonces los terminos en la suma para la longitud de polígono inscrito son de la forma:

$$|c(t_j)-c(t_{j-1})| = |(x_1'(s_{1,j}),\dots,x_n'(s_{n,j}))|\,(t_j - t_{j-1})$$

Nos gustaremos remplacer la norma

$$|(x_1'(s_{1,j}),\dots,x_n'(s_{n,j}))|$$

por $|c'(s_j)| = |(x_1'(s_j),\dots,x_n'(s_j))|$ algún $s_j\in[t_{j-1},t_j]$ y debido al continuidad de c' [c es clase C^1], es plausible que mientras $t_j - t_{j-1}\to 0$ es pequeño entonces tambien los errores

$$|(x_1'(s_{1,j}),\dots,x_n'(s_{n,j}))| - |c'(s_j)| = \varepsilon_j$$

son suficiamente pequeños para que:

$$\sum_{j=1}^{N} |(x_1'(s_{1,j}),\dots,x_n'(s_{n,j}))|(t_j - t_{j-1})$$
$$= \sum_{j=1}^{N} |c'(s_j)|(t_j - t_{j-1}) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j (t_j - t_{j-1})$$

tiene los restos $\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j(t_j - t_{j-1}) \longrightarrow 0$.

[Nota la primer suma $\sum_{j=1}^{N}|c'(s_j)|(t_j - t_{j-1}) \longrightarrow \int_{t_a}^{t_b}|c'(t)|\,dt$]

Para establecer tal control sobre estos terminos ε_j, uno usa que funciones continuos con dominio compacto son de hecho uniformamente continuos.

Considera el función continuo:

$$f : \overbrace{[t_a,t_b]\times\dots\times[t_a,t_b]}^{n\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n)\longmapsto |(x_1'(\tau_1),\dots,x_n'(\tau_n))|$$

[f es continuo debido a que c es clase C^1].

Que f es continuo, y su dominio compacto, f es uniformamente continuo, que significa dado cualquier $\varepsilon>0$, existeria algún $\delta>0$ tal que

$$|(\tau_1,\dots,\tau_n)-(s_1,\dots,s_n)| < \delta$$
$$\Longrightarrow |f(\tau_1,\dots,\tau_n) - f(s_1,\dots,s_n)| < \varepsilon.$$

Ahora regresando al nuestro Partición $\mathcal{P}$, vemos que cuando $|\mathcal{P}| < \delta/n$ [la partición es suficiamente FINA] tenemos para nuestros $s_{j,k}\in[t_{j-1},t_j]$

$$|(s_{j,1},s_{j,2},\dots,s_{j,n})-(t_{j-1},\dots,t_{j-1})|$$
$$\le \sum_{k=1}^{n}|s_{j,k}-t_{j-1}| \le n(t_j - t_{j-1}) \le n\cdot|\mathcal{P}| < \delta$$

recuerda $|\mathcal{P}| = \max_{j=1,\dots,N} t_j - t_{j-1}$

Entonces, debido al continuo uniforme de f arriba, tenemos

$$|f(s_{j,1},\dots,s_{j,n}) - f(t_{j-1},\dots,t_{j-1})| < \varepsilon$$

ó ya que $f(s_{j,1},\dots,s_{j,n}) = |(x_1'(s_{j,1}),\dots,x_n'(s_{j,n}))|$ y $f(t_{j-1},\dots,t_{j-1}) = |c'(t_j)|$, tenemos que

$$|\varepsilon_j| = |f(s_{j,1},\dots,s_{j,n}) - f(t_{j-1},\dots,t_{j-1})| < \varepsilon$$

para que los terminos restos arriba son controlados:

$$\left|\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j(t_j - t_{j-1})\right| \le \sum_{j=1}^{N}|\varepsilon_j|(t_j - t_{j-1})$$
$$\le \varepsilon\sum_{j=1}^{N} t_j - t_{j-1} = \varepsilon(t_b - t_a)$$

lo que es tan pequeño como deseamos ($\varepsilon>0$ arbitraria). Recordando que funciones continuos ($|c'(t)|$) son integrables tenemos las longitudes de polígonos inscritos expresado por la suma de dos sequencias convergentes:

$$\sum_{j=1}^{N}|c'(t_{j-1})|(t_j - t_{j-1}) \quad \text{que converge á} \quad \int_{t_a}^{t_b}|c'(t)|\,dt$$

$$y \quad \sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j(t_j - t_{j-1}) \quad \text{que converge á Zero.} \quad \square$$

Mencionamos que para curvas planar se puede simplificar la última demonstración en dividir la curva planar en una concactenación de varias gráficas y demonstrar (con teorema valor medio) que un gráfica de un función C^1 es rectificable con longitud:

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Ejemplos:

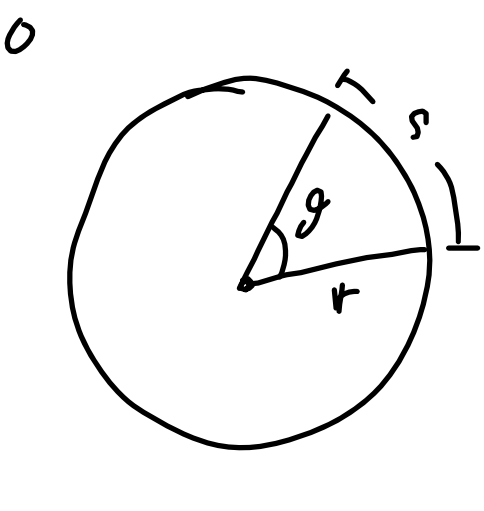
1) Un círculo del radio r parametrizamos con funciones trigonometricas:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$\longrightarrow x' = -r\sin\theta, \quad y' = r\cos\theta$$

$$\longrightarrow |\widehat{c(0),c(\theta)}| = \int_0^\theta \sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta}\,d\theta = r\cdot\theta = s$$

como debe ser:



$$\left[\frac{\theta}{2\pi} = \frac{s}{2\pi r} \leftrightarrow s = r\cdot\theta\right]$$

2) Tipicamente encontrar formulas explicitas para anti-derivadas es dificil, si no "imposible" en terminos de funciones estandar. Ya que encontrar formulas explicitas para longitud del arco involucra encontrar anti-derivadas (evaluar un integral) tipicamente no esperamos obtener formulas explicitas para longitudes del arcos.

Con un elipse:

$$x = a\cos u, \quad y = b\sin u$$

$$\longrightarrow x' = -a\sin u, \quad y' = b\cos u$$

$$\Rightarrow |\widehat{c(0)c(u)}| = \int_0^u \sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}\,du$$

$$= a\int_0^u \sqrt{1 - e^2\cos^2 u}\,du$$

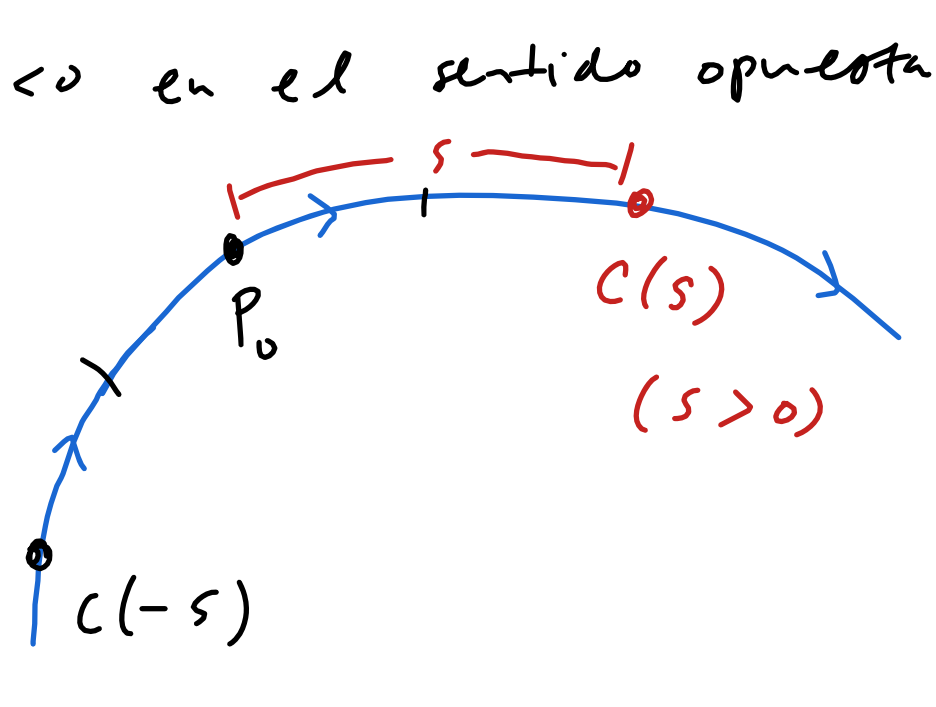
donde $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ es la eccentricidad del elipse.

Cuando $e\neq 0$ (el elipse no es circular) la integral

$\int_0^u \sqrt{1-e^2\cos^2 u}\,du$ es un ejemplo de un "integral eliptica" (del 2da tipo), y en particular NO tiene una formula explicita en terminos de funciones elementarios.

Igual si en general no conocemos como escribir su formula esplicita con funciones elementarios el longitud del arco nos da un manera natural para parametrizar curvas regular.

(*) en eligir algún punto "base" P_0 en una curva orientado, dejamos $s\in\mathbb{R}$ corresponde al punto de la curva con longitud de arco al P_0 "s" donde $s>0$ es en el sentido que coincide con la orientación, y $s<0$ en el sentido opuesto la orientación del curva:



en formulas, dado algún parametrización regular $t\longmapsto c(t)$ de la curva, donde $c'(t)$ dirige la orientación, tener su parametrización por longitud del arco consiste en reparametrizar por el cambio de variable:

$$s = \int_0^t |c'(\tau)|\,d\tau = \varphi(t).$$

NOTA: $\varphi'(t) = |c'(t)| > 0$ (c es regular)

tenemos por teorema funcion inverso que igual $t = \varphi^{-1}(s) = \psi(s)$, y la parametrización:

$\gamma(s) = c(\psi(s))$ sería un parametrización por longitud del arco.

por regla de cadena, tenemos:

$$\frac{d\gamma}{ds}(s) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}, \quad \text{donde } s = \varphi(t).$$

En particular $\left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = 1$ es vector unitario (velocidad 1)

De menudo en calcular sobre curvas general, es natural, y las formulas simplifican, cuando parametrizamos con respecto á longitud del arco.