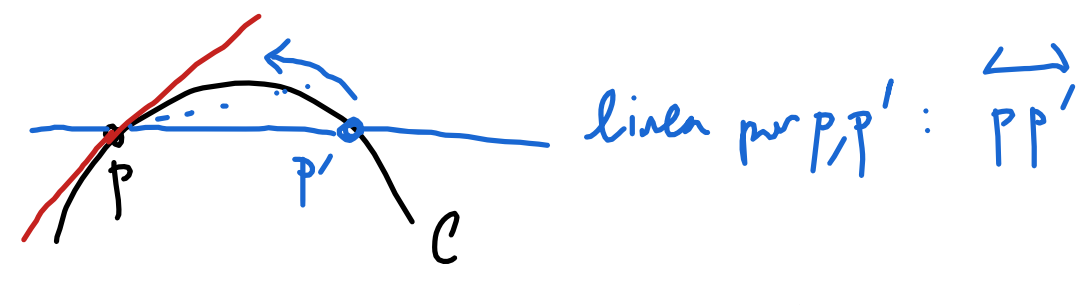
§10: Círculos osculantes, Curvatura

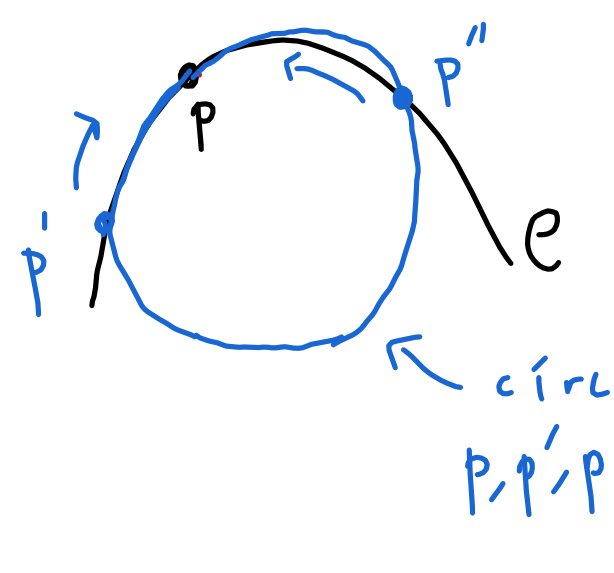
Igual que la linea tangente definimos por limite de lineas secantes:



$$\text{tangente en } p = \lim_{p' \to p} \overleftrightarrow{pp'} \quad [\text{donde } p, p' \in \mathcal{C}]$$

que es (cuando el limite existe) la linea que bien aproxima la curva $\mathcal{C}$ alrededor $p \in \mathcal{C}$.

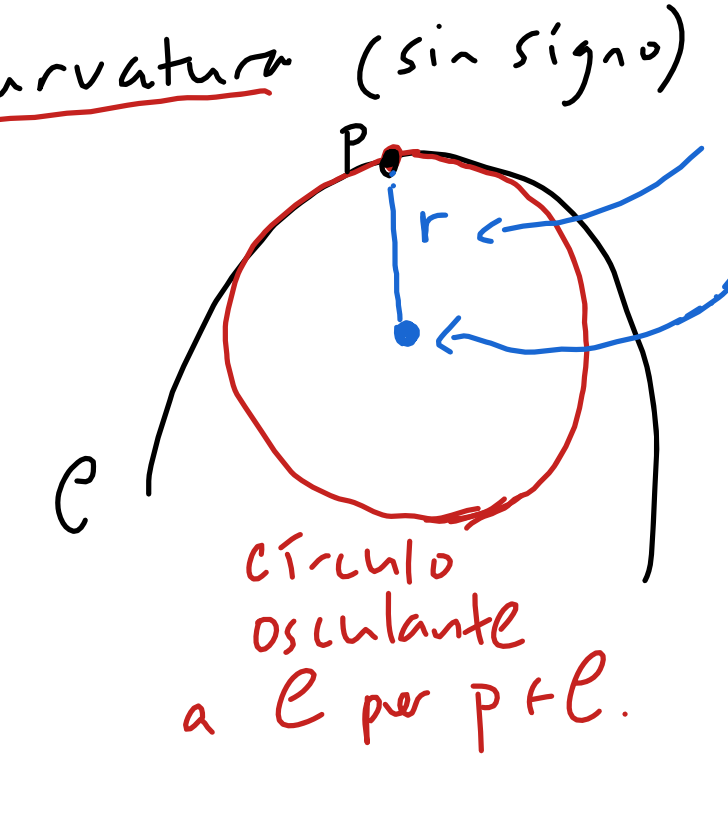
Entendemos mas de la forma local de la Curva $\mathcal{C}$ en aproximarlo con otras tipos de curvas; p.ej. círculos. Entonces definimos el círculo osculante a una curva $\mathcal{C}$ por el punto $p \in \mathcal{C}$ como el limite (cuando existe):



$$\text{círculo osculante en } p = \lim_{p', p'' \to p} \mathrm{Circ}(p, p', p'') \quad [\text{donde } p, p', p'' \in \mathcal{C}]$$

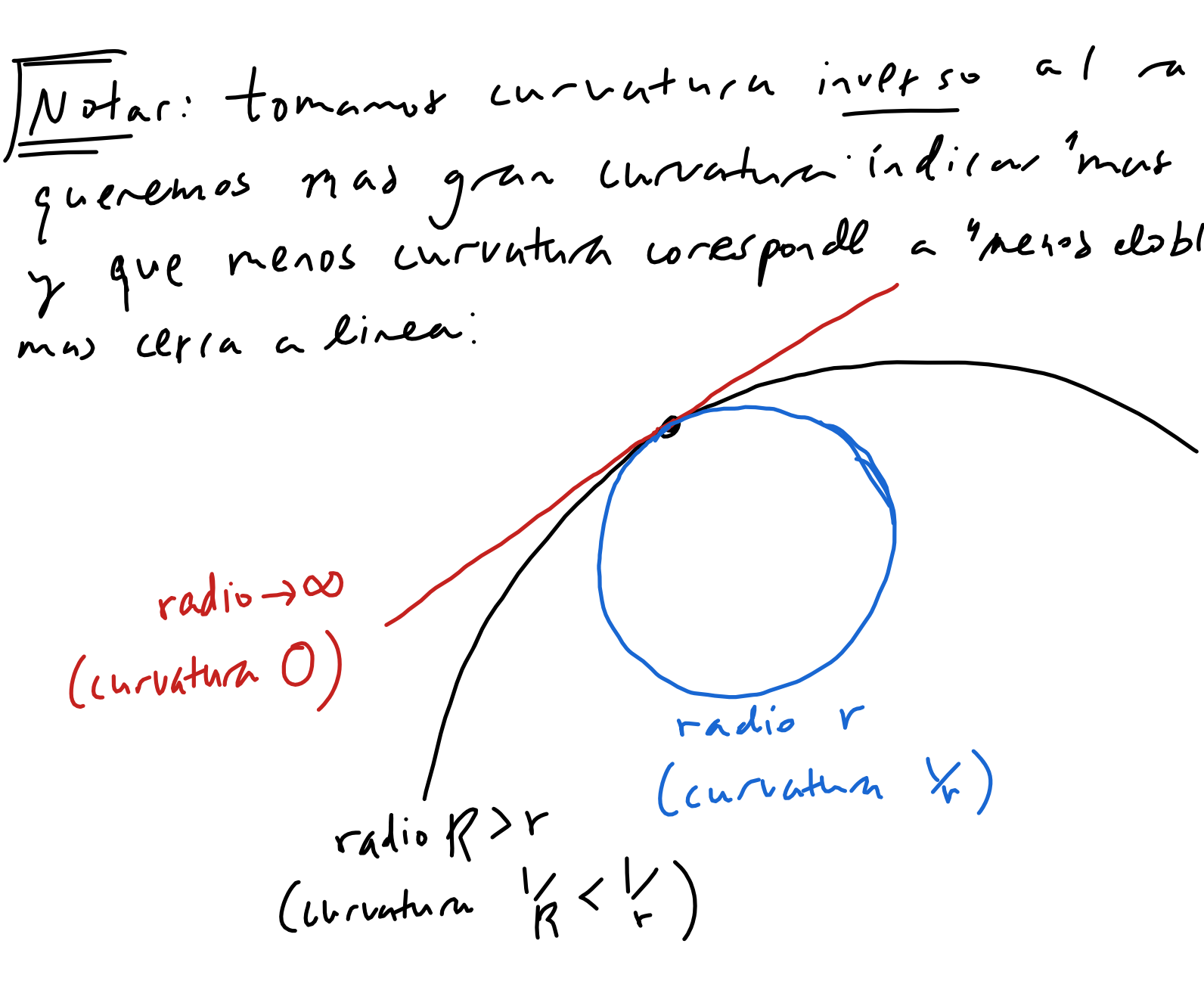
Y este círculo limite sería el círculo que bien aproxima la forma de la curva alrededor $p \in \mathcal{C}$.

Llamaremos el centro, y el radio del círculo osculante de una curva $\mathcal{C}$ por $p \in \mathcal{C}$ el centro de curvatura, y radio de curvatura respectivamente de la curva $\mathcal{C}$ por $p \in \mathcal{C}$. El inverso del radio de curvatura es llamado la curvatura (sin signo) de la curva $\mathcal{C}$ por $p \in \mathcal{C}$.


p
r
C
radio de curvatura (por p∈C)
centro de curvatura (por p∈C)
círculo osculante a C por p∈C.

$k = 1/r$ curvatura (sin signo).

Notar: tomamos curvatura inverso al radio porque queremos mas gran curvatura indicar "mas doblando" y que menos curvatura corresponde a "menos doblando"; ó mas cerca a linea:



Ahora queremos establecer unos formulas analiticas para que podemos calcular curvaturas y círculos osculantes directamente. A saber estableceremos:

1) Para una gráfica (planar): $(x, y(x))$, entonces

$$\rightarrow k = \frac{|y''|}{|1 + (y')^2|^{3/2}}$$

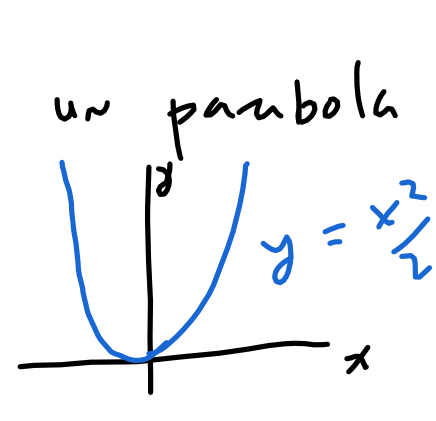
[el círculo osculante es siempre tangente a la curva para que su centro esta ubicado a lo largo la linea normal de distancia $r = 1/k$).

2) Para una curva parametrizado regular: $(x(t), y(t))$

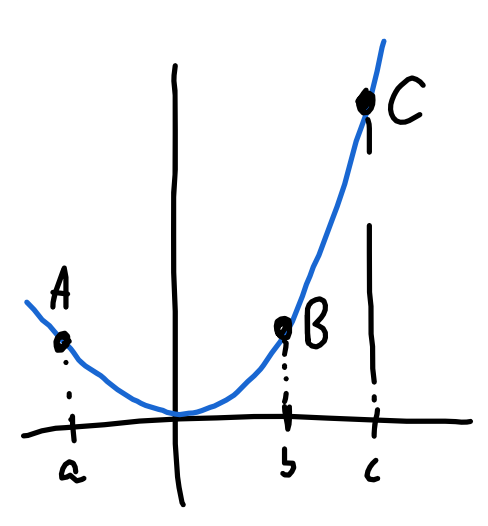
$$\rightarrow k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{|(x')^2 + (y')^2|^{3/2}}.$$

Antes calcular por el caso general, consideramos un ejemplo para ver un poco mas preciso que involucra los limites de la definición geometrical.

Ejemplo (parabola): Consideramos un parabola grafical:



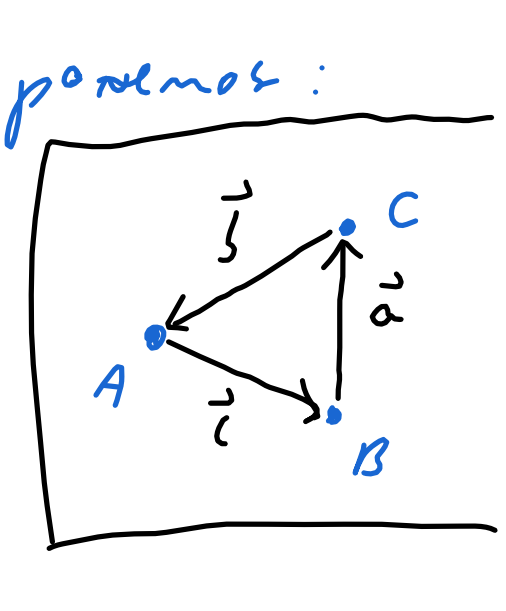
para encontrar el círculo osculante al parabola en el punto $B = (b, \frac{b^2}{2})$ tenemos que describir los círculos que pasan por $A = (a, \frac{a^2}{2})$, B, $C = (c, \frac{c^2}{2})$ con $a < b < c$ y examinar su limite mientras $a, c \to b$.



Entonces, para comenzar, tenemos que resolver: ¿dado 3 puntos en el plano, como encontramos el círculo que contiene estos puntos?

Lemma (formulas por círculos): dado 3 puntos en el plano: $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ (no co-lineal) ponemos:

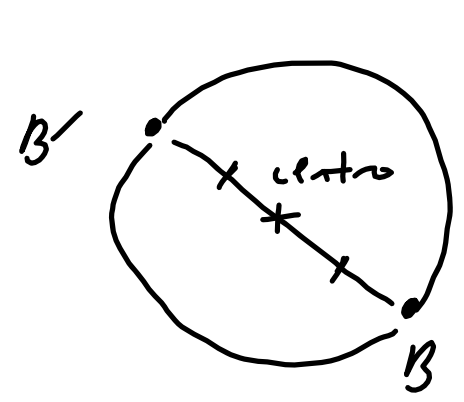
$$\vec{a} = C - B, \quad \vec{b} = A - C, \quad \vec{c} = B - A$$



direcionando las lados del $\Delta(A,B,C)$, y $\vec{a}^\perp, \vec{b}^\perp, \vec{c}^\perp$ sus rotaciones anti-horario por $\frac{\pi}{2}$ [p.ej. $\vec{a} = (a_1, a_2) \rightarrow \vec{a}^\perp = (-a_2, a_1)$].

Entonces el círculo que pasa por A, B, C tiene diametro: $\overline{BB'}$, donde

$$\left[B' = C + \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\vec{a}^\perp \cdot \vec{c}} \vec{a}^\perp \right]$$



ademas su radio, y diametro son por:

$$\left[d = 2r = \frac{|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|}{2\,\mathrm{Area}(A,B,C)} \right]$$

donde $\mathrm{Area}(A,B,C)$ es el area del triangulo con vertices A, B, C, entonces: $2\,\mathrm{Area}(A,B,C) = \left| \det \begin{pmatrix} -A- & 1 \\ -B- & 1 \\ -C- & 1 \end{pmatrix} \right|.$

Ahora apliquemos estas formulas al parabola, y despues consideramos su demostración.

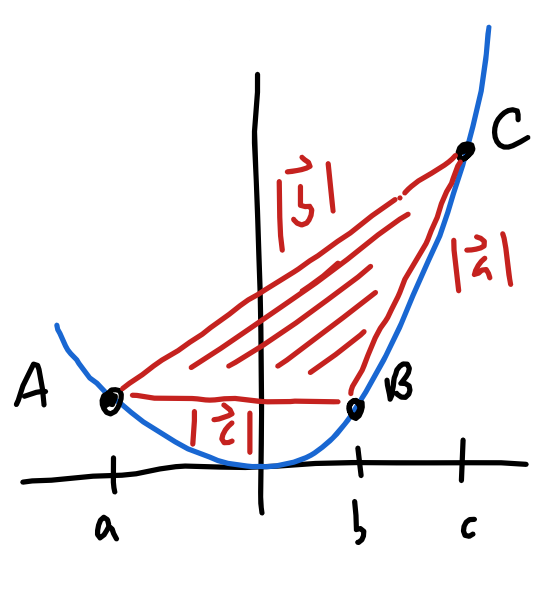
Ejemplo (parabola continuado): tenemos $A = (a, \frac{a^2}{2})$, $B = (b, \frac{b^2}{2})$, $C = (c, \frac{c^2}{2})$ con $a < b < c$; y entonces calculamos:

$$2\,\mathrm{Area}(A,B,C) = \begin{vmatrix} b-a & \frac{b^2-a^2}{2} \\ c-b & \frac{c^2-b^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(b-a)(c-b)(c-a)$$

$$|\vec{a}|^2 = |C-B|^2 = (c-b)^2 + \frac{(c^2-b^2)^2}{4} = (c-b)^2\left[1 + \frac{(c+b)^2}{4}\right]$$

$$|\vec{b}|^2 = |A-C|^2 = (a-c)^2 + \frac{(a^2-c^2)^2}{4} = (a-c)^2\left[1 + \frac{(a+c)^2}{4}\right]$$

$$|\vec{c}|^2 = |B-A|^2 = (b-a)^2 + \frac{(b^2-a^2)^2}{4} = (b-a)^2\left[1 + \frac{(b+a)^2}{4}\right]$$



Entonces:

$$r(a,b,c) = \frac{|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|}{(b-a)(c-b)(c-a)}$$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{(c+b)^2}{4}\right)\left(1 + \frac{(a+c)^2}{4}\right)\left(1 + \frac{(b+a)^2}{4}\right)}$$

y su limite mientras $a < b < c$ tienen $a, c \to b$ es:

$$r(b) = (1 + b^2)^{3/2}$$

que es el radio de curvatura del parabola en $B = (b, \frac{b^2}{2})$.

Notar: en la misma manera encontramos que el centro del círculo osculante esta ubicado en la linea normal al parabola, que es otra manera decir el círculo osculante es tangente al parabola (un hecho general).

En resumen, en el punto $(x, \frac{x^2}{2})$ del parabola, su curvatura es:

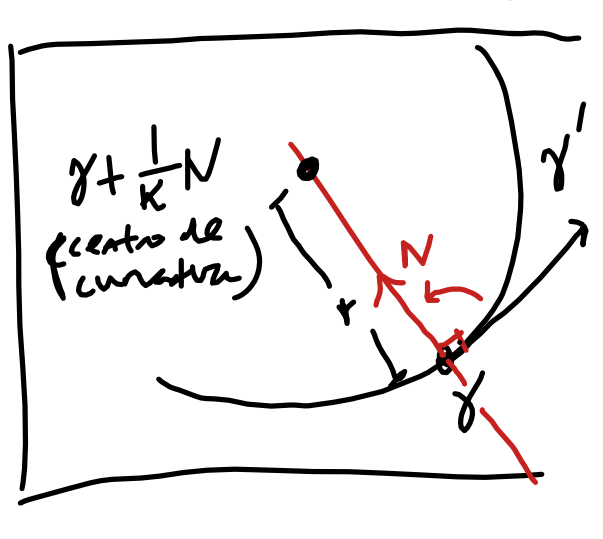
$$k(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}.$$

Ahora estableceremos nuestro Lemma sobre formulas para círculos y por consecuencia nuestras formulas analiticas para calcular curvaturas y círculos osculantes. Mas preciso mostramos:

Teorema: Sea $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una parametrización regular y de clase C^2. Entonces en cada punto $\gamma(t)$ de su traza, su círculo osculante existe y tiene centro de curvatura en:

$$\left[\gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t) \right]$$

donde $N = \frac{(-y', x')}{|\gamma'|}$ es el vector unitario normal a γ (girando anti-horario $\frac{\pi}{2}$ de $\frac{\gamma'}{|\gamma'|}$) y

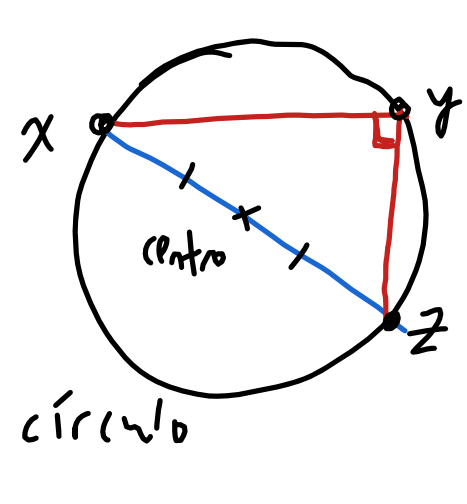


$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{|\gamma'|^3}$$

es la curvatura con signo de γ ($|\kappa| = k = 1/r$ para r el radio de curvatura).

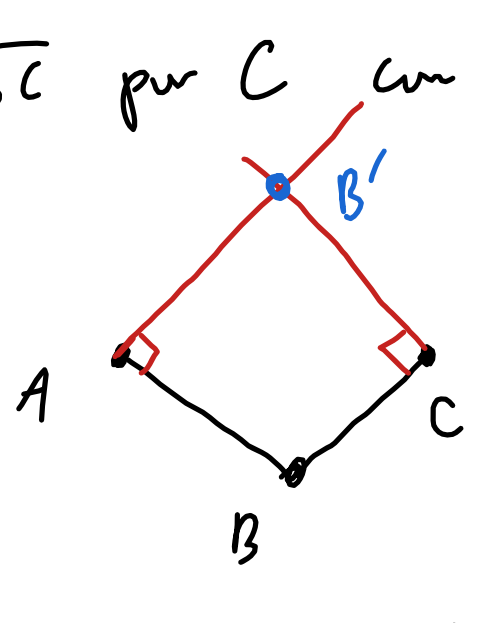
Demostración: 1ro establecemos las formulas sobre un círculo pasando por 3 puntos en la Lemma arriba, y despues aplicaremos a nuestro curva obteniendo las formulas general usando expansion de Taylor.

Entonces comenzamos con la Lemma con $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ (no co-lineal) y recordamos la teorema de THALES:



$\Leftrightarrow \angle(x,y,z) = \frac{\pi}{2}$

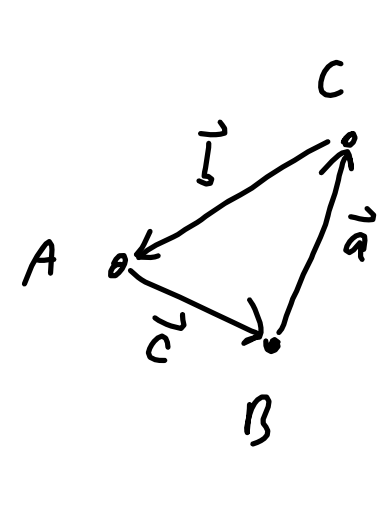
y ahora constuyemos un diametro de $\mathrm{Circ}(A,B,C)$ en encontrar punto de intersección de perpendicular al $\overline{BC}$ por C con perpendicular de $\overline{AB}$ por A:



$\Rightarrow \overline{BB'}$ es diametro de $\mathrm{Circ}(A,B,C)$ (entonces el centro es por punto medio de $\overline{BB'}$).

algebraicamente, encontramos B' en resolver las ecuaciones:

$$A + s\vec{c}^\perp = C + t\vec{a}^\perp, \text{ ó,}$$



$$\vec{b} + s\vec{c}^\perp = t\vec{a}^\perp \quad (\vec{b} = A - C)$$

que tomando producto interior con $\vec{a}$, $\vec{c}$ tenemos:

$$s = \frac{-\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{c}^\perp \cdot \vec{a}}, \quad t = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\vec{a}^\perp \cdot \vec{c}}$$

que nos da p.ej. $B' = C + \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\vec{a}^\perp \cdot \vec{c}} \vec{a}^\perp$ como dijimos en la lemma. Para la formula para el diametro calculamos $|B' - B|$. □

Ahora para establecer nuestros formulas general de curvatura, sea $a < b < c$, y queremos examinar el círculo por $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(b)$, $C = \gamma(c)$ mientras $a, c \to b$ para obtener el círculo osculante a la traza de γ por $B = \gamma(b)$.

Por expansión de Taylor (γ es C^2), tenemos

$$\begin{cases} A = B + (a-b)\gamma'(b) + \frac{(a-b)^2}{2}(\gamma''(b) + R_a) \\ C = B + (c-b)\gamma'(b) + \frac{(c-b)^2}{2}(\gamma''(b) + R_c) \end{cases}$$

donde $R_a, R_b \to 0$ mientras $a, c \to b$ (continuidad de 2da deriv.)

Sustituyendo las expansiones en nuestro formula de la lemma obtenemos:

$$B' = C + \frac{(A-C) \cdot (B-A)}{(C-B)^\perp \cdot (B-A)} \cdot (C-B)^\perp$$

$$= B + \mathcal{O}(c-b) + \frac{2(c-a)\left[\gamma'(b) + \mathcal{O}(c-a)\right] \cdot \left[\gamma'(b) + \mathcal{O}(b-a)\right]}{(c-a)\,\gamma'(b)^\perp \cdot \gamma''(b) + o(b-a) + o(c-b)} \left(\gamma'(b)^\perp + \mathcal{O}(c-b)\right)$$

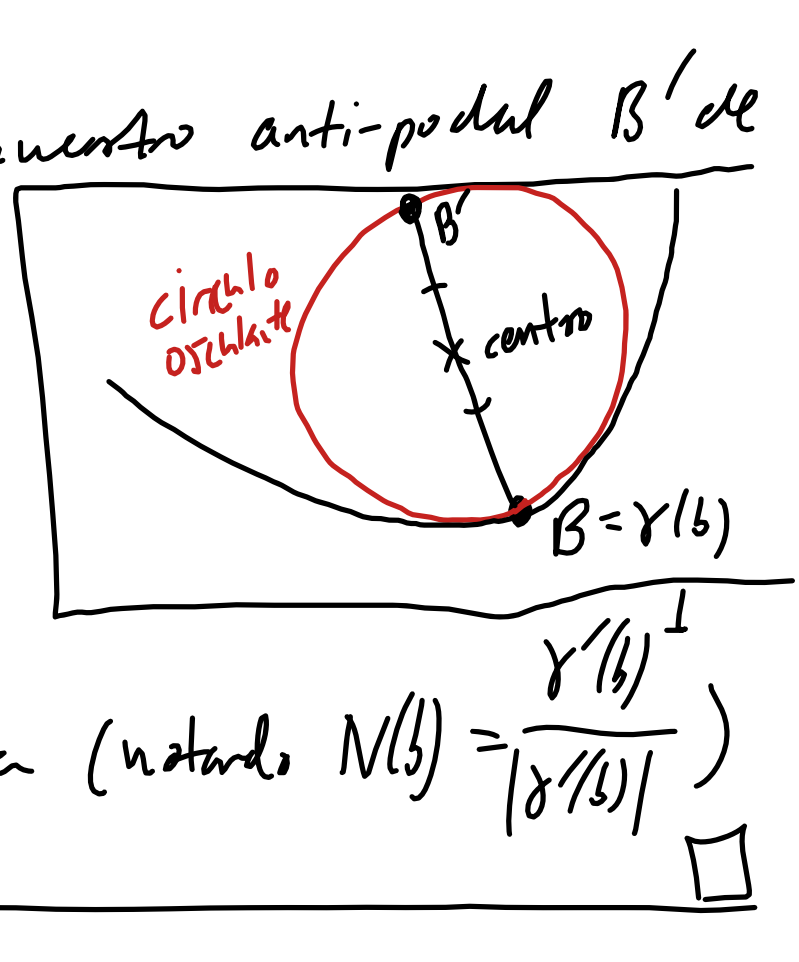
donde ponemos $\mathcal{O}(c-b)$ para terminos de la forma $(c-b) \cdot F$ donde $|F|$ es acotado mientras $c \to b$, y $o(c-b)$ para terminos de la forma $(c-b) \cdot G$ donde $G \to 0$ mientras $c \to b$ (similar para $\mathcal{O}(b-a)$, $o(b-a)$, etc.).

Notar que debido a $a < b < c$ tenemos:

$$b - a < c - a, \quad y, \quad c - b < c - a$$

$$\Rightarrow \left|\frac{b-a}{c-a}\right| < 1, \quad \left|\frac{c-b}{c-a}\right| < 1 \quad \text{son acotados, para que}$$

$\frac{o(b-a)}{c-a}$, y $\frac{o(c-b)}{c-a}$ son $o(1)$, es decir tienen limite cero mientras $a, c \to b$, y ahora nuestro anti-podal B' de B en el círculo osculante será:



$$B' = B + \frac{2|\gamma'(b)|^2}{\gamma'(b)^\perp \cdot \gamma''(b)} \cdot \gamma'(b)^\perp$$

que es de la forma en la teorema (notando $N(b) = \frac{\gamma'(b)^\perp}{|\gamma'(b)|}$) □

Comentarios:

1) debido a que curvas regular son localmente gráficas es suficiente mostrarlo para gráficas que simplifica el algebra un poco.

2) Por consequencia de computacion en el teorema, el círculo osculante a la curva $\mathcal{C}$ por $p \in \mathcal{C}$ es, en particular, tangente a la curva por $p \in \mathcal{C}$. Entonces resulta que es equivalente trabajar con la definición equivalente:

$$\left\{ \text{círculo osculante por } p \in \mathcal{C} = \lim_{p' \to p} \mathrm{Circ}'(p, p') \quad [p, p' \in \mathcal{C}] \right.$$

donde $\mathrm{Circ}'(p,p')$ es el círculo tangente a la curva $\mathcal{C}$ por p, y pasa por p, p'

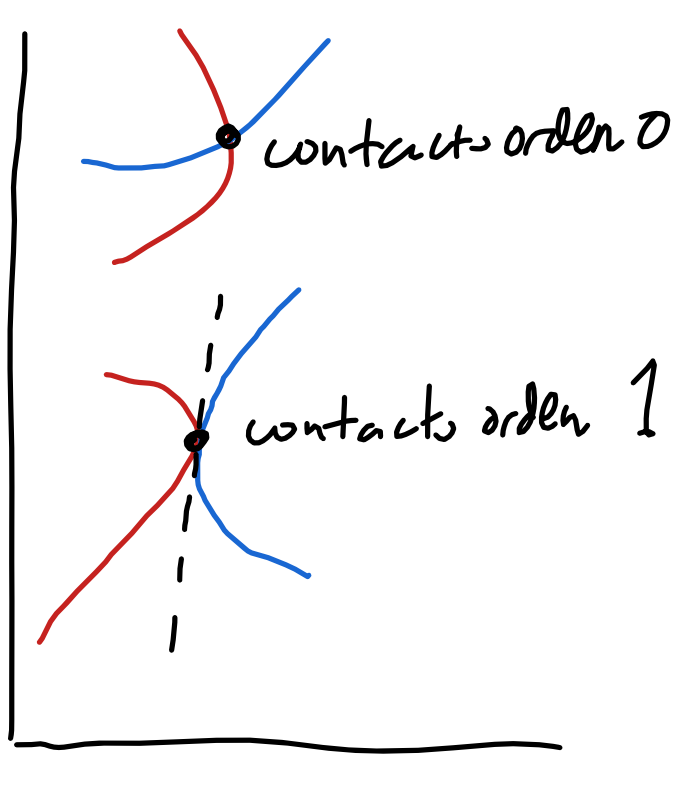
3) Curvas osculantes / tangencía son comunmente descritos con el lenguaje de "contacto" entre curvas (ó "jets" de gráficas ≡ expansiones de Taylor). Más preciso, decimos dos curvas suaves, regular, planar tienen contacto de orden k, ó, $k+1$-punto contacto en sus puntos de intersección donde sus gráficas tienen expansiones de Taylor que coinciden hasta orden k:

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \text{ curva 1}$$

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \text{ curva 2}$$

contacto orden k $\Updownarrow$ $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k = b_k$.

Entonces por ejemplo dos curvas tienen contacto orden 0 en sus puntos de intersección, y contacto orden 1 en puntos de tangencía.



- La linea tangente a una curva $\mathcal{C}$, por $p \in \mathcal{C}$ es equivalentamente characterizado como la linea que tiene contacto 1er orden con la curva por $p \in \mathcal{C}$.
- El círculo osculante a una curva $\mathcal{C}$, por $p \in \mathcal{C}$ es equivalentemente characterizado como el círculo que tiene contacto 2do orden con la curva por $p \in \mathcal{C}$. Entonces dos curvas tienen contacto de orden 2 exactamente en sus puntos donde sus círculos osculantes coinciden.