Examen 1: Soluciones

1(a) La linea tangente al parabola en $x = x_0$ es dirigida por

$$p'(x_0) = (1, x_0)$$

entonces el vector $(-x_0, 1)$ en girar $p'(x_0)$ por $\frac{\pi}{2}$ dirige la linea normal al parabola que pasa por el punto:

$$p(x_0) = \left(x_0, \frac{x_0^2}{2}\right)$$

esta linea entonces es parametrizado como:

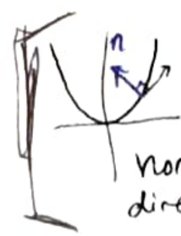
$$\lambda \longmapsto \left(x_0, \frac{x_0^2}{2}\right) + \lambda(-x_0, 1) = \left(x_0(1-\lambda), \frac{x_0^2}{2} + \lambda\right)$$

o implicitamente por la ecuación:

$$\boxed{x - x_0 + x_0\left(y - \frac{x_0^2}{2}\right) = 0}$$

1(b) Una normal unitario al parabola en $p(X) = \left(X, \frac{X^2}{2}\right)$ es:

$$n(X) = \frac{(-X, 1)}{|(-X, 1)|} = \frac{(-X, 1)}{\sqrt{1 + X^2}}$$



la otra elección del normal unitario es en dirección opuesto: $-n$

Entonces $\vec{F}(X,Y) = \left(X, \frac{X^2}{2}\right) + Y\frac{(-X, 1)}{\sqrt{1+X^2}}$, y calculamos:

$$D\vec{F}(X,Y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{F}}{\partial X} & \frac{\partial \vec{F}}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Y\left(-\frac{1}{\sqrt{1+X^2}} + \frac{X^2}{(1+X^2)^{3/2}}\right) & \frac{-X}{\sqrt{1+X^2}} \\ X + Y\left(-\frac{X}{(1+X^2)^{3/2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{1+X^2}} \end{bmatrix}$$

↪ continua

tomando el determinante, y poniendo igual a cero, tenemos: (2)

$$0 = \det D\vec{F}(X,Y) = \frac{1}{\sqrt{1+X^2}}\left[1 + Y\left(\frac{X^2-(1+X^2)}{(1+X^2)^{3/2}}\right) + X\left(X - Y\frac{X}{(1+X^2)^{3/2}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 1+X^2 + Y\left(-\frac{(1+X^2)}{(1+X^2)^{3/2}}\right) = 1+X^2 - \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y = (1+X^2)^{3/2}.}$$

[* NOTAR: si eligemos la otra normal unitario $(-n)$, obtendremos el lugar: $Y = -(1+X^2)^{3/2}$.

2(a) Para encontrar $c(t) = (x(t), y(t))$, debemos encontrar el punto de intersección del elipse; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; con la linea que pasa por $(a,0)$ y $(-a,t)$. Esa linea podemos parametrizar como:

$$\lambda \longmapsto (1-\lambda)\cdot(a,0) + \lambda\cdot(-a,t) = (a(1-2\lambda), \lambda t) = (x(\lambda), y(\lambda))$$

que intersecta la elipse cuando:

$$1 = \frac{a^2(1-2\lambda)^2}{a^2} + \frac{\lambda^2 t^2}{b^2} = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^2\frac{t^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow 4\lambda = \lambda^2\left(4 + t^2/b^2\right) \Rightarrow \lambda = 0, \text{ ó, } \underbrace{\lambda = \frac{4}{4+\frac{t^2}{b^2}} = \frac{4b^2}{4b^2+t^2}}$$

entonces el punto de intersección distinto de $(a,0)$ $(\lambda=0)$ es:

$$\begin{cases} x = a(1-2\lambda) = a\left(\frac{4b^2+t^2-8b^2}{4b^2+t^2}\right) = a\left(\frac{t^2-4b^2}{t^2+4b^2}\right) \\ y = \frac{4b^2 t}{t^2+4b^2} (=\lambda t), \end{cases}$$

como deseamos.

para chequear si tal parametrización es regular [$c'(t) \neq (0,0)$?] 3

calculamos:

$$x'(t) = a\left[\frac{2t}{t^2+4b^2} - \frac{2t(t^2-4b^2)}{(t^2+4b^2)^2}\right] = 2at\left[\frac{t^2+4b^2-t^2+4b^2}{(t^2+4b^2)^2}\right] = \frac{2\cdot 8ab^2 t}{(t^2+4b^2)^2}$$

16

$$y'(t) = \frac{4b^2}{t^2+4b^2} - \frac{8b^2t^2}{(t^2+4b^2)^2} = \frac{4b^2}{(t^2+4b^2)^2}\left[t^2+4b^2-2t^2\right] = \frac{4b^2(4b^2-t^2)}{(4b^2+t^2)^2}$$

y tenemos $x'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$ y ($b\neq 0$) nunca tenemos ceros

$y'(t)=0 \Leftrightarrow t=\pm 2b$ simultaneas, para que

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{la curva } \underline{\text{sí}} \text{ es regular}}$

la curva NO traza toda la elipse: falta el punto $x=a,\ y=0$ que no es en su imagen ($y=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow x=-a$).

2(b) Podemos encontrar γ en la misma manera que encontramos c en (a), ó observamos que por reflexion sobre eje y tenemos:

$$\gamma(\tau) = \left(a\cdot\frac{4b^2-\tau^2}{4b^2+\tau^2},\ \frac{4b^2\tau}{4b^2+\tau^2}\right) = (\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau))$$

Para encontrar el cambio de variable tienes varias opciones.

* Opcion 1: calculamos directamente de las ecuaciones que tenemos que $\varphi(\tau)=t$ esta por resolver las ecuaciones:

$$a\cdot\frac{t^2-4b^2}{t^2+4b^2} = x(t) = \tilde{x}(\tau) = a\cdot\frac{4b^2-\tau^2}{4b^2+\tau^2}, \quad y$$

$$\frac{4b^2t}{t^2+4b^2} = y(t) = \tilde{y}(\tau) = \frac{4b^2\tau}{4b^2+\tau^2}.$$

re-arreglando la 2'da ecuación $y(t)=\tilde{y}(\tau)$, tenemos la ecuación cuadrática: $t(4b^2+\tau^2)=\tau(t^2+4b^2)$, ó p.ej.

$$\tau t^2-(\tau^2+4b^2)t+4b^2\tau=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{\tau^2+4b^2\pm\sqrt{(\tau^2+4b^2)^2-16\tau^2b^2}}{2\tau}=\frac{\tau^2+4b^2\pm\sqrt{\tau^4-8\tau^2b^2+16b^4}}{2\tau}$$

$$=\frac{\tau^2+4b^2\pm\sqrt{(\tau^2-4b^2)^2}}{2\tau}=\frac{\tau^2+4b^2\pm(\tau^2-4b^2)}{2\tau}$$

que da las dos posibilidades de $t=\tau$, ó, $t=\frac{8b^2}{2\tau}=\frac{4b^2}{\tau}$

y la segunda raíz es la que satisface el 1'er ecuación $x(t)=\tilde{x}(\tau)$ también, para que:

$$\boxed{t=\varphi(\tau)=4b^2/\tau}.$$

(pueden ser manipulaciones mas elegantes para hacer el algebra, pero directo con formula quadratica no sale tan mal).

* Opción 2: Encontramos el inverso de la parametrización $t\mapsto c(t)$; es decir dado (x_0,y_0) en la elipse $(x_0\neq a, y_0\neq 0)$ encontramos el valor de $t_0\in\mathbb{R}$ tal que $(x_0,y_0)=c(t_0)$.

En parte (a) ya vimos que ahora consiste en intersecionar la linea por $(a,0)$ y (x_0,y_0) con la linea $x=-a$, es decir: linea

$$\lambda\mapsto(1-\lambda)(a,0)+\lambda(x_0,y_0)=((1-\lambda)a+\lambda x_0,\ \lambda y_0),$$

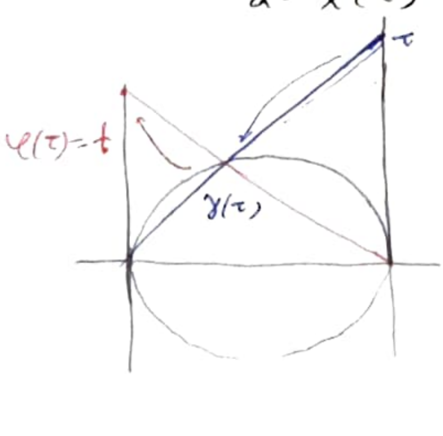
que intersecta $x=-a$ por

$$-a=(1-\lambda)a+\lambda x_0\Rightarrow\lambda_0=\frac{2a}{a-x_0}\Rightarrow t_0=\lambda_0y_0=\frac{2ay_0}{a-x_0},$$

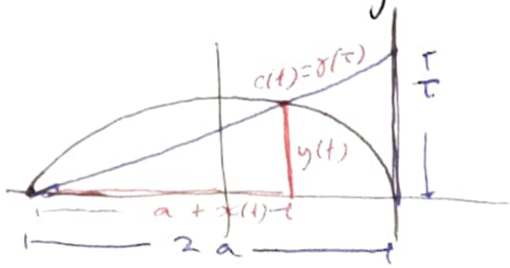
ahora nuestro reparametrización sería por:

$$t=\varphi(\tau)=\frac{2a\tilde{y}(\tau)}{a-\tilde{x}(\tau)}=\frac{2\cdot4b^2\tau}{4b^2+\tau^2-4b^2+\tau^2}=\frac{2\cdot4b^2\tau}{2\tau^2}=\frac{4b^2}{\tau},$$

eso es: $\boxed{t=\varphi(\tau)=\frac{4b^2}{\tau}}$.



* OPCION 3: para encontrar el valor de τ que tiene $\gamma(\tau) = c(t)$ consideramos los triangulos similares:



que implica.

$$\frac{\tau}{2a} = \frac{y(t)}{a+x(t)} = \frac{4b^2t}{a(t^2+4b^2+t^2-4b^2)}, \text{ ó}$$

$$\frac{\tau}{2a} = \frac{4b^2t}{2at^2} \Rightarrow \tau = \frac{4b^2}{t}, \text{ ó inversamente}$$

que $\boxed{t = \varphi(\tau) = 4b^2/\tau}$.

(cualquier de estos 3 opciones entonces resuelve el problema, yo encontro opcion 3ᵉʳ lo mas elegante/satisfaciendo).

---

3 (a) Consideramos la composición:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{c_1 \times c_2} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{P} \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto (c_1(t), c_2(t)) \longmapsto c_1(t)\cdot c_2(t) = (P \circ (c_1 \times c_2))(t).$$

Por regla de cadena tenemos:

$$\left[\frac{d}{dt}(c_1 \cdot c_2)\right]\Big|_t = DP\Big|_{(c_1\times c_2)(t)} \cdot D(c_1 \times c_2)\Big|_t, \text{ y calculamos individualmente}$$

de $P(x_1, y_1, x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$, que:

$$DP\Big|_{(x_1,y_1,x_2,y_2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1} & \frac{\partial P}{\partial y_1} & \frac{\partial P}{\partial x_2} & \frac{\partial P}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & x_1 & y_1 \end{bmatrix},$$

y $D(c_1 \times c_2) = \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ x_2' \\ y_2' \end{bmatrix}$ en escribir $c_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$, $c_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$, entonces →

multiplicando los matrices obtenemos:

$$\left[\frac{d}{dt}(c_1\cdot c_2)\right]\Big|_t = \begin{bmatrix} x_2(t) & y_2(t) & x_1(t) & y_1(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \\ x_2'(t) \\ y_2'(t)\end{bmatrix} = \left[c_2\cdot c_1' + c_1\cdot c_2'\right]\Big|_t$$

ó $\quad \dfrac{d}{dt}(c_1\cdot c_2) = c_1'\cdot c_2 + c_1\cdot c_2'$ como deseamos $\square$.

$\boxed{3(b)}$ Escribiendo $|c'|^2 = c'\cdot c'$ y diferenciando los dos lados, obtenemos (usando parte (a) por lado derecho) que

$$2|c'|\cdot\frac{d}{dt}|c'| = c'\cdot c'' + c''\cdot c' = 2c'\cdot c''$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}|c'| = \frac{c'\cdot c''}{|c'|}$$ (NOTA: La curva es regular para que $|c'|\neq 0$). $\square$.