Instituto Tecnológico Autónomo de México

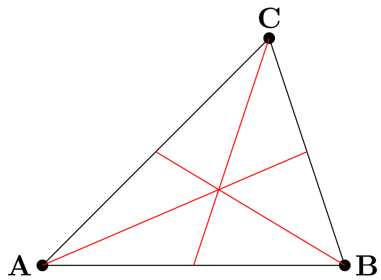
Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202) **Primavera 2026**

Repaso antes examen 1 (geometría en $\mathbb{R}^n$, regla de cadena, curvas parametrizadas)

Aqui un colecion de problemas para practicar sobre las temas del 1'er examen.

1. Considera 3 puntos en el plano, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^2$, ubicados en los vertices de un triangulo.



   (a) Muestra que el area del triangulo esta dado por:

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 1 \\ B_1 & B_2 & 1 \\ C_1 & C_2 & 1 \end{pmatrix}$$

   donde $\mathbf{A} = (A_1, A_2), \mathbf{B} = (B_1, B_2), \mathbf{C} = (C_1, C_2)$.

   (b) Cuando el area del triangulo no es cero (los puntos no son colineales), muestra que cualquier punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ se puede escribir como combinacion lineal:

$$\mathbf{x} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}$$

   donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a + b + c = 1$.

   (c) Muestra que el punto medio del segmento de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ es el punto por $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$.

   (d) Muestra que los segmentos que conectan los vertices con los puntos medios de sus lados opuestos intersectan en un punto unico. Encuentra las coordenadas de est punto de interseccion.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, y $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ suaves.

   (a) Suponer que la composicion satisface: $f \circ c = \mathit{constante}$. Muestra que:

$$\nabla f|_{c(t)} \cdot c'(t) = 0$$

   donde $\nabla f|_p = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})|_p$ es el gradiente de f (evaluada en el punto $p \in \mathbb{R}^3$).

   (b) Considera un elipsoide:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

   donde $a, b, c > 0$ son constantes. Establece que la distancia del origin al plano tangente del elipsoide en (x, y, z) esta dado por:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}.$$

3. Considera un elipse centrado por el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $0 < b < a$ son constantes.

(a) Sea $p(x, y)$ la distancia del origen a la linea tangente del elipse en x, y. Muestra que:

$$p = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - x^2 - y^2}}$$

(b) Considera la parametrizacion del elipse por:

$$c(u) = (a \cos u, b \sin u).$$

Muestra que la velocidad $|c'(u)|$ de esta parametrizacion is proporcional al $1/p$.

4. Considera la funcion $\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \det(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_2 - u_2 v_1$.

(a) Para $c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ suaves, *usar la regla de cadena* para verificar que:

$$\frac{d}{dt} \det(c_1, c_2) = \det(c_1', c_2) + \det(c_1, c_2').$$

(b) Sea $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ suave y regular. Muestra que

$$0 = \frac{d}{dt} \det(c, c')$$

si y solamente si c'' es algun multiple de c.

5. Considera una cicloide, parametrizada por:

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \theta \mapsto (\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta) = \mathbf{c}(\theta)$$

generado en rodear un circulo (unitario) a lo largo el eje x. Recuerda que el *punto del contacto* del circulo con el eje x durante el mocion es en el punto $(\theta, 0)$.

(a) Muestra que la linea tangente al cicloide es perpendicular a la linea que conecta $\mathbf{c}(\theta)$ al punto de contacto.

(b) Dado $\theta_o \in [0, 2\pi]$, calcula el longitud del arco, $s(\theta_o)$, de cicloide trazado por $\theta \in [0, \theta_o]$.

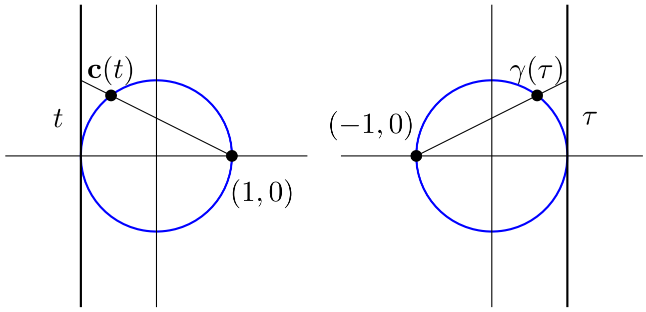
(c) Para cada $\theta \in [0, \pi]$ considera el punto $\mathbf{x}(\theta)$ a distancia $4 - s(\theta)$ de $\mathbf{c}(\theta)$ a lo largo la linea tangente del cicloide (donde $s(\theta)$ es el longitud del arco que calculaste en parte (a)). Muestra que:

$$\mathbf{x}(\theta) = (\theta + \sin\theta, 3 + \cos\theta)$$

Comentario: la curva trazado por $\mathbf{x}$ *es otra arco de un cicloide.*

Recuerda: tienes identidades de trigonometría $\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$

6. Considera las dos curvas parametrizados, $\gamma, \mathbf{c}$, con trazas en el círculo unitario, y definidas en las siguientes figuras:



En el parte superior del circulo $y > 0$ (entonces $t > 0, \tau > 0$), encuentra el cambio de variable $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ que hace γ y $\mathbf{c}$ reparametrizaciones:

$$\gamma = \mathbf{c} \circ \varphi.$$

7. Para A, B, C constantes, considera la curva implicita:

$$y = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

que pasa por el origen ($x = y = 0$).

(a) Muestra que la linea por el origen con pendiente p intersecta esta curva implicita en el origen, y otro punto única dado por:

$$\mathbf{c}(p) = (x(p), y(p)), \qquad x = \frac{p}{A + 2Bp + Cp^2}, \quad y = \frac{p^2}{A + 2Bp + Cp^2}$$

mientras $A + 2Bp + Cp^2 \neq 0$.

(b) Encuentra la interseccion del eje x con la linea tangente a la curva implicita en el punto $\mathbf{c}(p)$.