Instituto Tecnológico Autónomo de México

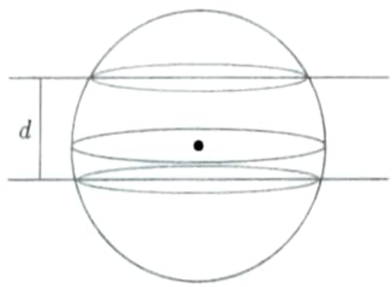
Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202) **Primavera 2026**

Tercer Departamental 15/04/2026 **Duración:** 2h

No está permitido el uso de material electrónico.
Responde de manera clara y concisa, justificando adecuadamente todas tus respuestas.

1. Calcular el área de una 'rebanada' en una esfera de radio R que consiste en el parche de la esfera comprendido entre dos planos paralelos, siendo $0 < d < R$ la distancia entre ambos planos:



2. Considere el campo vectorial:

$$\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)(x, y)$$

definido sobre el plano.

   (a) Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ dos puntos fijos y $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ una curva regular que va de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. ¿Cómo depende el valor de la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} (\vec{v} \cdot T) ds$ de la curva $\mathcal{C}$?
   Sugerencia: Examine esta integral de línea en coordenadas polares.

   (b) ¿Cuál es el valor de la integral de línea $\oint_{\mathcal{C}} (\vec{v} \cdot T) ds$ cuando $\mathcal{C}$ es la frontera de un cuadrado centrado en el origen?

3. Considere la transformación (una inversión circular):

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \backslash (0,0) \to \mathbb{R}^2 \backslash (0,0), \quad \varphi(x, y) = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}.$$

Calcular el área de la región $\varphi(D)$, donde D es la región anular comprendida entre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ y la elipse centrada en el origen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con semiejes: $a \geq b \geq 1$.

Cada pregunta tiene el siguiente valor:

1)	2.a)	2.b)	3)
7	7	4	7

Soluciones Examen 3

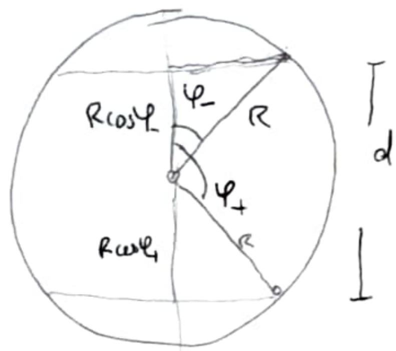
1 En coordenadas esfericas :

$$x = R \sin\varphi \cos\theta$$

$$y = R \sin\varphi \sin\theta$$

$$z = R \cos\varphi$$

el área que buscamos corresponde á $\theta \in [0, 2\pi]$, y $\varphi \in [\varphi_-, \varphi_+]$:



donde $R\cos\varphi_- - R\cos\varphi_+ = d$

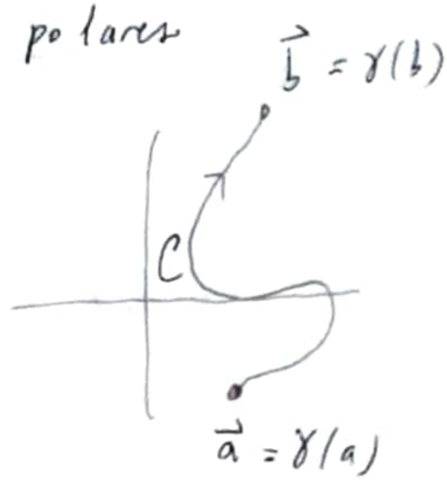
entonces el área esta:

$$\int_0^{2\pi}\int_{\varphi_-}^{\varphi_+} R^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = 2\pi R^2 \left(-\cos\varphi\right)\Big|_{\varphi_-}^{\varphi_+}$$

$$= 2\pi R^2 \left(\cos\varphi_- - \cos\varphi_+\right) = \boxed{2\pi R \cdot d}$$

2 (a) parametrizamos C en coordenadas polares

$$\gamma(t): \begin{cases} x(t) = r(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = r(t)\sin\theta(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$



y calculamos:

$$\int_C (\vec{v}\cdot T)\,ds = \int_a^b \underbrace{r^3(\cos\theta,\sin\theta)}_{\vec{v}(\gamma(t))} \cdot \underbrace{\left[r'(\cos\theta,\sin\theta) + r\theta'(-\sin\theta,\cos\theta)\right]}_{\gamma'(t)} dt$$

$$= \int_a^b r^3(t)\, r'(t)\,dt = \frac{r^4(t)}{4}\Big|_a^b = \frac{r(b)^4 - r(a)^4}{4}$$

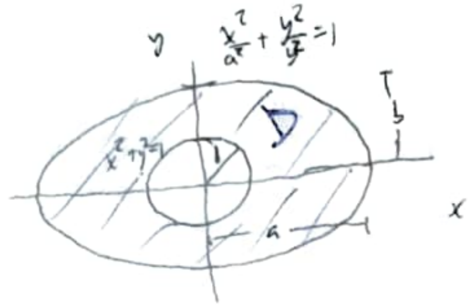
$$= \boxed{\frac{|\vec{b}|^4 - |\vec{a}|^4}{4}}$$, que no depende de la curva C, y solo depende de sus punto inicial / final.

(b) la frontera del cuadrado es cerrado, entonces debido a parte (a) la integral de linea sería zero:

$$\boxed{\oint_C (\vec{v}\cdot T)\,ds = 0}$$

$\boxed{3}$ Por cambio de variable, el área buscado es:

$$\text{Area}(\varphi(D)) = \int_{\varphi(D)} dA = \int_{D} |\det(d\varphi)|\, dA$$

para : 

. Entonces calculamos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{(1,0)}{x^2+y^2} - \frac{2x(x,y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2+y^2-2x^2,\ -2xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(y^2-x^2,\ -2xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{(0,1)}{x^2+y^2} - \frac{2y(x,y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(-2xy,\ x^2+y^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(-2xy,\ x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

y notamos que son ortogonal:

$$-2xy(y^2-x^2) - 2xy(x^2-y^2) = 0\ ;$$

entonces $|\det(d\varphi)| = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| \cdot \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|$;

donde $$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 = \frac{(y^2-x^2)^2+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4} = \frac{x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^4} = \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\ ;$$

y igualmente $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|^2 = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$.

Entonces: $|\det(d\varphi)| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$, y nuestro área

es dado por el integral:

$$\text{Area}(\varphi(D)) = \int_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$, donde en coordenadas polares

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ la región D esta dado por:

$\theta \in [0, 2\pi]$ $\quad 1 \leq r \leq r_+(\theta)$ con

$$r_+(\theta)^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = 1 \Rightarrow r_+(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}}$$

y nuestro área buscado sería:

$$\text{Area}(\varphi(D)) = \int_0^{2\pi}\int_1^{r_+(\theta)} \frac{r\,dr\,d\theta}{r^4} = \int_0^{2\pi}\int_1^{r_+(\theta)} \frac{dr}{r^3}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2r^2}\Big|_1^{r_+(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2r_+^2}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} 1 - \frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2}\,d\theta\right) = \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{\pi}{a^2} - \frac{\pi}{b^2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2}\right).}$$