
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202) Primavera 2026

Segunda Departamental 11/03/2026 Duración: 2h

No está permitido el uso de material electrónico.

Responde de manera clara y concisa, justificando adecuadamente todas tus respuestas.

1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes y considere la curva parametrizada por

$$\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta, \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta).$$

¿Cuál es la torsión de esta curva? ¿Y su Curvatura?

2. Sea $t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada, suave y regular ($|\mathbf{x}'| \neq 0$) tal que $\mathbf{x}'(t_0) \wedge \mathbf{x}''(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$. Demuestre que el plano generado por $\mathbf{x}'(t_0)$ y $\mathbf{x}''(t_0)$ (es decir, el plano osculador de la curva en $\mathbf{x}(t_0)$) no depende de la parametrización de la curva.
3. Sea $[a, b] \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ una parametrización regular de una curva plana, y sea $\mathbf{T}(t)$ un vector tangente unitario a lo largo de dicha curva.

(a) Considere las dos curvas parametrizadas por

$$t \mapsto \mathbf{y}_{\pm}(t) = \mathbf{x}(t) \pm \mathbf{T}(t).$$

Demuestre que las longitudes de los arcos trazados por $\mathbf{y}_{\pm}(t)$ para $a \leq t \leq b$ son iguales.

(b) Si $[0, 1] \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ recorre una vez algún círculo (con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(1)$), considere

$$(0, 1) \times (0, l) \ni (t, \lambda) \mapsto \mathbf{x}(t) + \lambda \mathbf{T}(t) = \mathbf{f}(t, \lambda)$$

para alguna constante $l > 0$. Calcule el área de la región plana trazada por $\mathbf{f}$.

4. Sea $s \mapsto \mathbf{x}(s) \in \mathbb{R}^3$ una curva espacial regular parametrizada por la longitud de arco, con $\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}'' \neq 0$. Determine si alguna de las siguientes parametrizaciones, $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ traza una superficie regular:

$$\mathbf{f}(s, t) = \mathbf{x}(s) + t\mathbf{T}(s), \quad \mathbf{g}(s, t) = \mathbf{x}(s) + t\mathbf{N}(s), \quad \mathbf{h}(s, t) = \mathbf{x}(s) + t\mathbf{B}(s)$$

donde $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ es el triedro (o marco) de Frenet-Serret a lo largo de la curva.

Cada pregunta tiene el siguiente valor:

1)	2)	3.a)	3.b)	4)
5	5	5	5	5

Exan 2 Soluciones

I Sea $\vec{x}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)$

para α, β constantes. Podemos observar que

$$z(\theta) = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta = \alpha x(\theta) + \beta y(\theta)$$

para que la curva esta contenida en el plano $z = \alpha x + \beta y$,
y entonces su torsión es cero: $\boxed{\tau = 0}$

También podemos calcular directamente (para encontrar la curvatura también) que:

$$\vec{x}' = (-\sin \theta, \cos \theta, -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta)$$

$$\vec{x}'' = (-\cos \theta, -\sin \theta, -\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta) = -\vec{x}$$

$$\vec{x}''' = -\vec{x}'$$

entonces: $\vec{x}' \wedge \vec{x}'' = (-\alpha, -\beta, 1)$ y tenemos

$$\boxed{k = \frac{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|}{|\vec{x}'|^3} = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}{(1 + (\beta \cos \theta - \alpha \sin \theta)^2)^{3/2}}}$$

y, de nuevo:

$$\tau = \frac{\det(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''')}{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|^2} = \frac{\det(\vec{x}', \vec{x}'', -\vec{x}')}{|\vec{x}' \wedge \vec{x}''|^2} = 0$$

(porque $\vec{x}', \vec{x}'', -\vec{x}'$ son dependientes).

2 Sea $t = f(\tau)$ alguna reparametrización de $\vec{x}(t)$.

con $\tau \mapsto \gamma(\tau) = \vec{x}(f(\tau))$ la reparametrización

(y $f' \neq 0$). Entonces, por regla de cadena, tenemos:

$$\frac{d\gamma}{d\tau}(\tau) = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \vec{x}'(f(\tau)) \cdot f'(\tau)$$

$$\text{y } \frac{d^2\gamma}{d\tau^2}(\tau) = \vec{x}''(f(\tau)) f'(\tau)^2 + \vec{x}'(f(\tau)) f''(\tau)$$

y concluimos ($f' \neq 0$) que

$$\text{span} \left\{ \frac{d\gamma}{d\tau}, \frac{d^2\gamma}{d\tau^2} \right\} = \text{span} \left\{ (f')^2 \vec{x}'' + f'' \vec{x}', f' \vec{x}' \right\}$$

$$= \text{span} \{ \vec{x}'', \vec{x}' \}$$

y evaluando en $t = t_0$, en particular,
no depende por la
parametrización de la curva.

3 (a) Calculamos: $\vec{y}'_{\pm} = \vec{x}' \pm T'$

$$\text{donde } T' = \frac{dT}{dt} = \left(\frac{ds}{dt} \right) \cdot \frac{dT}{ds} = \frac{|\vec{x}'|}{k} (kN); \quad \underline{\vec{x}' = |\vec{x}'| T}$$

$$\text{entonces: } \vec{y}'_{\pm} = |\vec{x}'| (T \pm kN); \quad \text{y}$$

$$|\vec{y}'_{\pm}|^2 = |\vec{x}'|^2 (1 + k^2), \quad \text{y entonces las longitudes}$$

de arcos de $\vec{y}_{+}(t)$ o $\vec{y}_{-}(t)$ sobre $t \in [a, b]$ son las dos:

$$\int_a^b |\vec{x}'| \sqrt{1+k^2} dt \quad (\text{y son iguales}) \quad \square$$

3(b)

Calcular:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = \vec{x}' + \lambda T' = |\vec{x}'| (T + \lambda kN)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \lambda} = T$$

entonces el area que buscamos esta:

$$\int_0^1 \int_0^l |T + \lambda kN| |\vec{x}'| d\lambda dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^l \lambda |k| |\vec{x}'| d\lambda dt = \int_0^1 \left[\frac{\lambda^2}{2} |k| |\vec{x}'| \right]_0^l dt$$

$$= \frac{l^2}{2} \int_0^1 |k| |\vec{x}'| dt = \frac{l^2}{2r} \int_0^1 |\vec{x}'| dt$$

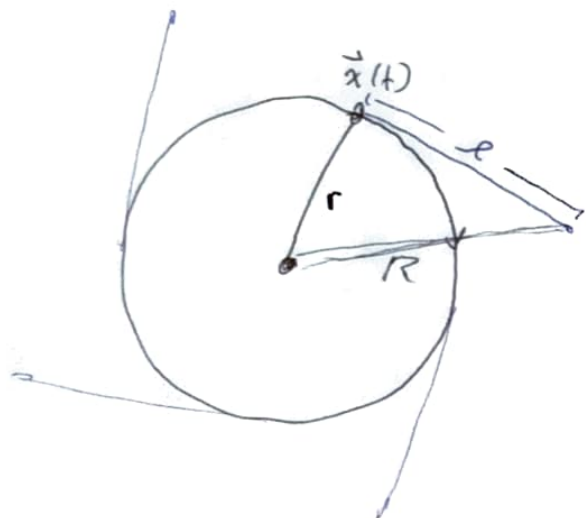
la curvatura del círculo trazado por $\vec{x}(t)$ es constante, digamos $1/r$.

$$= \frac{l^2}{2r} \cdot 2\pi r = \boxed{\pi l^2}$$

la integral $\int_0^1 |\vec{x}'| dt$ es el longitud del arco de tal círculo de radio r trazado por $\vec{x}(t)$, que es $2\pi r$.

3 (b)

Alternativamente podemos calcular este área geométricamente en considerando:



para que la región trazado por $\vec{f}$ es un región anular entre un círculo de radio r (trazado por $\vec{x}(t)$), y un ~~superficie~~ círculo de radio

$$R = \sqrt{r^2 + l^2}, \text{ entonces}$$

la área buscada está:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(l^2 + r^2) - \pi r^2 = \boxed{\pi l^2} \text{ como antes.}$$

4) Chequemos las condiciones para regularidad:

$$1) \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial s} = T + t \kappa N \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{f}}{\partial s} = t \kappa B$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = T$$

y $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{f}}{\partial s} = 0$ cuando $t=0$, por lo que esta parametrización nunca sea regular.

$$2) \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial s} = T + t(-\kappa T + \tau B) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{g}}{\partial s} = N(1 - \kappa t)T + t\tau B$$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = N$$

que pueda anular en un punto con $t = \frac{1}{\kappa}$, y $\tau=0$,
y entonces tal parametrización no es siempre regular.

$$3) \quad \frac{\partial \vec{h}}{\partial s} = T - t\tau N \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{h}}{\partial s} = B(1 - t^2\tau^2)$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = B$$

que nunca es cero $\left(\left| \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{h}}{\partial s} \right|^2 = 1 - t^2\tau^2 > 0 \right)$,

entonces $\vec{h}$ siempre sería una parametrización regular.