

Instituto Tecnológico Autónomo de México

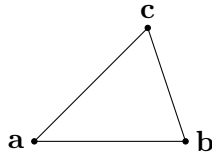
Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202)

Primavera 2026

Practica con integrales (parametrizaciones, integrales multiples)

1. Sea $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tres puntos en los vertices de un triangulo:



Considere la parametrización del plano pasando por estos tres puntos basado en tomar \mathbf{a} por origen, y los vectores directores $\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}$:

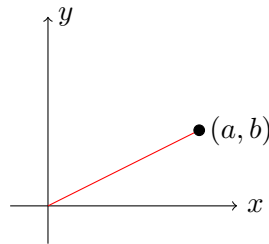
$$\mathbf{f}(u, v) = \mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + v(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

Similarmente, en elegir \mathbf{b} por origen y vectores directores $\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b}$ tenemos la parametrización del mismo plano por:

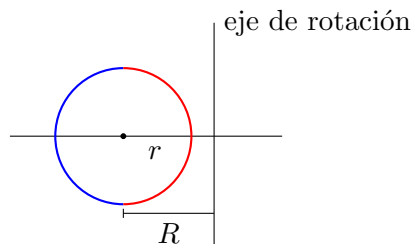
$$\mathbf{g}(x, y) = \mathbf{b} + x(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + y(\mathbf{c} - \mathbf{b}).$$

Encuentra el cambio de variable $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que hace \mathbf{f} una reparametrización del \mathbf{g} : $\mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \varphi$.

2. Sea $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ cuatro puntos en espacio ubicado por los vertices de algun tetraedro. Determina el volumen de tal tetraedro.
3. Considere el cono obtenido en girar el siguiente segmento alrededor el eje y :

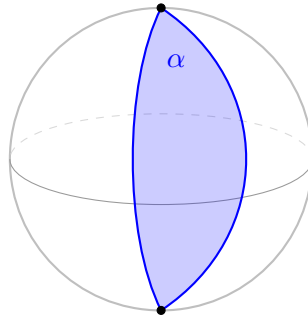


- (a) Determina el area de tal parche del cono.
- (b) Determina el volumen llenado entre tal cono y el eje y .
4. Considere un toro de revolucion estandard, por girar un circulo de radio r , alrededor un eje de distancia R a su centro (con $R > r$):



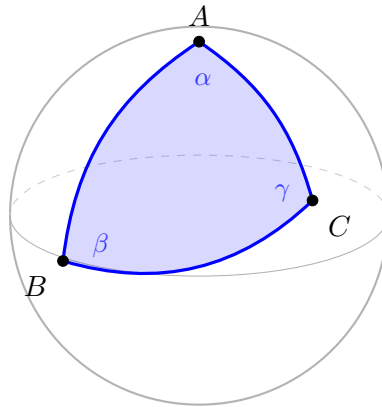
- (a) Determina el area del 'parche internal' de tal toro trazado en girar el medio circulo 'internal' alrededor el eje (el arco rojo en la figura arriba).
- (b) Determina el volumen llenado por el region interior tal toro de revolucion (un toro solido).

5. Determina el area de una lúnula esferical:



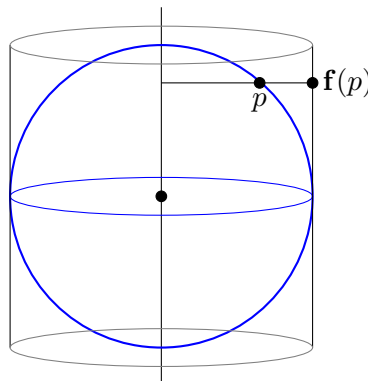
que es la region en una esfera del radio R , ubicado entre dos meridianos con angulo α entreo ellos.

6. Determina el area de un triangulo esferical en algún esfera del radio R y con angulos interior α, β, γ :



Sugerencia: Usar el ejercicio anterior (area de lúnula esferical), y considera que el triángulo esferical es un interseccion de ciertas lúnulas.

7. Considere el siguiente proyeccion de un esfera radio R a un cilindro radio R (y altura $2R$):



Demuestra que este transformacion preserva areas (Archimedes). Sabiendo que el area de un cilindro de radio R y altura h es $2\pi Rh$, deduce que el area de la esfera radio R esta $4\pi R^2$.

GENERALIZACIONES DE ARCHIMEDES: *consideramos dos maneras similar para calcular una recurrencia que generaliza la transformacion del ejercicio anterior. Dado $R > 0$, denotamos:*

$$S^{d-1}(R) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{u}| = R\}, \quad B^d(R) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{u}| \leq R\}$$

para la esfera de dimension $d - 1$ y la bola de dimension d con radio R . Denotamos:

$$V_d = \text{Vol}(B^d(1))$$

para el d -volumen de una bola unitaria de dimension d .

8. Sea $\mathbf{g} : S^1(1) \times B^{d-2}(1) \rightarrow \mathbb{R}^d$ la transformacion que envia $(X, Y) \in S^1(1), (u_1, \dots, u_{d-2}) \in B^{d-2}(1)$ á:

$$\mathbf{g}(X, Y, u) = (\sqrt{1 - |u|^2}X, \sqrt{1 - |u|^2}Y, u).$$

- (a) Verifica que la parametrizacion \mathbf{g} traza la esfera unitaria dimension $d - 1$.
 (b) Escribiendo $X = \cos \theta, Y = \sin \theta$ para $\theta \in [0, 2\pi]$, considera:

$$\mathbf{G} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \times B^{d-2}(1) \rightarrow B^d(1), \quad (\rho, \theta, u) \mapsto \rho \mathbf{g}(\cos \theta, \sin \theta, u)$$

que parametriza una bola unitaria de dimension d , y usa esta parametrizacion para establecer la relacion recursiva:

$$V_d = \frac{2\pi}{d} V_{d-2}.$$

- (c) De parte (b), y sabiendo que $V_2 = \pi, V_1 = 2$ deduce que:

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad V_{2k+1} = \frac{2^{k+1} \pi^k}{(2k+1)(2k-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}$$

9. Sea $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ algún parametrizacion de una esfera unitario de dimension $n - 1$ (definido sobre algún dominio $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$).

- (a) Verifica que:

$$\mathbf{F} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \times D \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}, \quad (r, \theta, u) \mapsto (\sqrt{1 - r^2} \mathbf{f}(u), r \cos \theta, r \sin \theta)$$

es una parametrizacion de una esfera unitario de dimension $n + 1$.

- (b) Usa la parametrizacion en parte (a) para establecer la misma relacion recursiva: $V_d = \frac{2\pi}{d} V_{d-2}$ del ejercicio anterior.

10. Las formulas arriba (8(c)) para volúmenes de d -bolas se puede escribir en manera unificado con la funcion Gamma:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (x > 0).$$

- (a) Integrando por partes muestra que: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Notando que $\Gamma(1) = 1$, deduce que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Muestra que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (recuerda en clase que usando coordenadas polares vimos que: $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).
 (c) De parte (b), deduce que $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \dots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ para $n \in \mathbb{N}$, y verifica que tenemos la formula general: $V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + \frac{d}{2})}$.

11. La función Beta está definida por:

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad (x > 0, y > 0).$$

Comentario: Esta función está relacionada con el integral que vimos en clase usando coordenadas esféricas generalizadas.

(a) Demuestra: $B(x, y) = B(y, x)$.

(b) De la sustitución $t = \sin^2 \varphi$, verifica: $B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\varphi) \cos^{2y-1}(\varphi) d\varphi$. Deduce que:

$$B(x, \frac{1}{2}) = \int_0^{\pi} \sin^{2x-1}(\varphi) d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\varphi) d\varphi = B(\frac{1}{2}, x).$$

(c) Usando que $\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du$ (sustitución $t = u^2$), deduce que:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u^{2x-1} v^{2y-1} e^{-u^2-v^2} dudv$$

y hacer un cambio de variable a coordenadas polares: $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$ para establecer la relación:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = B(x, y)\Gamma(x+y).$$