Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202) Primavera 2026

Más practica con integrales (integrales de linea, superficie)

---

1. Calcula la integral de linea $\int_C (x+y^2)dx + 2xy^2 dy$ sobre el arco orientado C cuando:
   (a) C es un segmento de linea recta de $(0,0)$ a $(1,2)$,
   (b) C es el arco de la parabola $y^2 = 4x$ de $(0,0)$ a $(1,2)$
   (c) C es la concatenación de los segmentos de lineas rectas de $(0,0)$ a $(1,0)$ y de $(1,0)$ a $(1,2)$.

2. Calcula las siguietes integrales de linea cuando $C \subset \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ es algun arco de $(1,0)$ a $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$:
   (a) $\int_C 3x(x+2y)dx + (3x^2 - y^3)dy$
   (b) $\int_C \frac{2x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{2y+x}{x^2+y^2} dy$

3. Determina el area de:
   (a) la gráfica $z = xy$ sobre $x^2 + y^2 \leq 1$.
   (b) la region del cono $x^2 + y^2 = z^2$ cortado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

4. Calcula las siguientes integrales (elige una orientacion como quieres):
   (a) $\int_{\{x^2+y^2+z^2=r^2\}} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$.
   (b) $\int_{\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\}} xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$.
   (c) $\int_S y^2 dz \wedge dx$ donde S es la superficie del tetrahedro con vertices en $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.
   (d) $\int_{\partial T} (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz$ donde T es el triangulo con vertices en $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ (y $a, b, c \in \mathbb{R}$ son unos constantes).

   Comentario: El centro de masa de un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ tiene coordenadas en

$$x_{cm} = \frac{\int_D x\ dV}{Vol(D)},\ y_{cm} = \frac{\int_D y\ dV}{Vol(D)},\ z_{cm} = \frac{\int_D z\ dV}{Vol(D)}.$$

5. Sea $\vec{\omega} = (0,0,\omega) \in \mathbb{R}^3$ fijado y considera el campo vectorial rotacional:

$$\vec{v}(\mathbf{x}) = \vec{\omega} \wedge \mathbf{x}, \qquad (\mathbf{x} = (x,y,z)).$$

   (a) Vizualizas el flujo de $\vec{v}$?
   (b) Determina $\mathrm{curl}(\vec{v}) = \mathrm{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v}$.
   (c) Sea C la frontera de un cuadrado centrado por el origen en el plano xy. Calcula directamente la integral de linea $\oint_C \vec{v} \cdot T\ ds$ (eligiendo alguna orientación de C).

6. Establece los siguientes formulas de integración por partes (sobre dominios apropiados):
   (a) $\int_D f \mathrm{div}(\mathbf{v})\ dV = \int_{\partial D} f\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} - \int_D \nabla f \cdot \mathbf{v}\ dV$
   (b) $\int_D f \mathrm{rot}(\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial D} f\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} - \int_D (\nabla f \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A}$

7. Considere un campo vectorial $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (de clase C^1). Una función $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es llamado un factor integrante para $\mathbf{v}$ si

$$\mathbf{v} = \mu \nabla f$$

es decir que $\mathbf{v}$ es proporcional (o conformal á) algun campo gradiente (de algúna función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$). Demuestra que cuando existe un factor integrante para $\mathbf{v}$ entonces $\mathbf{v}$ y $\mathrm{rot}(\mathbf{v})$ son ortogonal. Ademas dar un ejemplo de un campo vectorial $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que no admete ningún factor integrante.

8. Suponer que $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \backslash 0 \to \mathbb{R}^3$ es una campo vectorial suave tal que $\mathrm{rot}(\mathbf{v}) = 0$ sobre $\mathbb{R}^3 \backslash 0$. Demuestra que $\mathbf{v} = \nabla f$ es un campo gradiente de algúna función $f : \mathbb{R}^3 \backslash 0 \to \mathbb{R}$. ¿Que paso con la pregunta analoga para $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \backslash 0 \to \mathbb{R}^2$?

9. Sea $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ dos puntos fijos ubicado en el *interior* de algún toro de revolución T. Determina la integral superficie $\int_T \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ para el campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ dado por:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^3} + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{b}}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|^3}$$

10. Sea $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos curvas regular cerradas que son disjuntas. A estas dos curvas considera la siguiente superficie (cerrado) asociada: $S = \{p_1 - p_2 : p_j \in C_j\} \subset \mathbb{R}^3 \backslash 0$. Verifica que

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \in \mathbb{Z}$$

donde $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$ (este entero es llamado el *número de enlace* de las dos curvas). Calcula el numero de enlace entre $C_1 = \{z = 0,\ x^2 + y^2 = 1\},\ C_2 = \{x = 0,\ y^2 + z^2 = 2y\}$

11. En este ejercicio vamos a establecer de nuevo el teorema de valor promedio para funciones armónicas. A saber, sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y armonica ($\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = 0$) alrededor algun punto fijado $p \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Para $r > 0$, pon $\overline{f}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r^2(p)} f \ dA$ para el valor promedio de f sobre una esfera de radio r centrado por p. Usando que f es armonica sobre $B_r^3(p)$ demuestra que $\overline{f}$ esta constante (p.ej. que la derivada con respecto a r de $\overline{f}(r)$ es cero).

   (b) Demuestra que el limite

   $$\lim_{r \to 0} \overline{f}(r) = f(p)$$

   usando p.ej. coordenadas esfericales centrado en p y la continuidad de f. De parte (a), que $\overline{f}$ es constante, deduce que:

   $$f(p) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r^2(p)} f \ dA.$$

   (c) De parte (b) deduce que tambien:

   $$f(p) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_{B_r^3(p)} f \ dV.$$

   (d) De la teorema de valor promedio deduce la teorema valor maximo para funciones armonicas: si f es armonica sobre algun region $R \subset \mathbb{R}^3$ entonces el maximo de f ocurre en la frontera ∂R.