Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202) **Primavera 2026**

Examen final 26/05/2026 **Duración:** 2h.45m

No está permitido el uso de material electrónico.
Responde de manera clara y concisa, justificando adecuadamente todas tus respuestas.

1. Sea C la curva formada por los lados del triángulo con vértices en $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. Determine para cuáles valores de los parámetros $a,b,c \in \mathbb{R}$ el siguiente integral de línea:

$$\oint_C (bz-cy)dx + (cx-az)dy + (ay-bx)dz$$

esta cero.

2. Considera un toro de revolucion, $S \subset \mathbb{R}^3$, y fija un punto $\mathbf{a}$ en el interior de S.

Determina la integral de superficie: $\iint_S \mathbf{v}\cdot N_{ext}\, dA$ para el campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^3}$.

3. ¿Verdadero o falso? (*Recuerda justificar tus respuestas.*)

   (a) Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región anular y $\mathbf{v} = (P,Q) : D \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial suave sobre D con componentes que satisfacen $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ sobre D. Entonces $\oint_C \mathbf{v}\cdot T\, ds = 0$ para cualquier curva cerrada $C \subset D$.

   (b) Cada campo vectorial suave $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es localmente proporcional a algún campo gradiente (campo conservativo). Es decir: en una vecinidad de cualquier punto p es posible escribir $\mathbf{v} = g\nabla f$ para algunas funciones f,g sobre tal vecinidad.

   (c) $\oint_{C_1} \mathbf{v}\cdot T\, ds = \pm\oint_{C_2} \mathbf{v}\cdot T\, ds$ para dos lazos $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^3$ conectados por un tubo al cual $\mathbf{v}$ es tangente (ver figura 1).

   (d) $\oint_{C_1} \mathbf{v}\cdot T\, ds = \pm\oint_{C_2} \mathbf{v}\cdot T\, ds$ para dos lazos $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^3$ conectados por un tubo al cual $\mathrm{rot}(\mathbf{v})$ es tangente (ver figura 1).

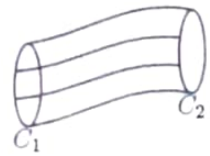
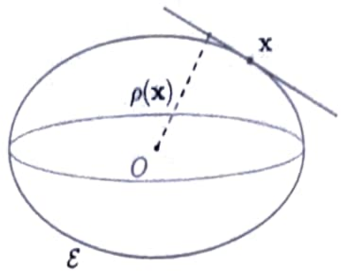


Figura 1.

4. Sea $\mathcal{E} = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ un elipsoide centrado en el origen, O. Considere la función:

$$\rho : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{>0}$$

que envía $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ a $\rho(\mathbf{x})$ la distancia desde el origen al plano tangente a $\mathcal{E}$ en $\mathbf{x}$.



Determine la integral: $\iint_{\mathcal{E}} \rho \, dA$.

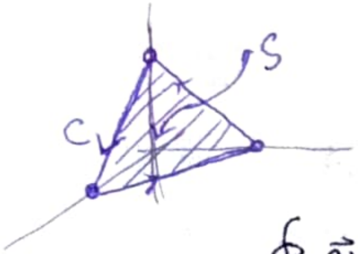
Bonus: En la misma situación que en el problema anterior, sea $\mathbf{x}_{in} \in \mathbb{R}^3$ un punto base fijo *interior* a $\mathcal{E}$ y defina $\rho_{in} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{>0}$ que envía $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ a $\rho_{in}(\mathbf{x})$ la distancia desde $\mathbf{x}_{in}$ al plano tangente a $\mathcal{E}$ en $\mathbf{x}$. Determine $\iint_{\mathcal{E}} \rho_{in} \, dA$. ¿ Qué ocurre para un punto base fijo $\mathbf{x}_{ext} \in \mathbb{R}^3$ *exterior* a $\mathcal{E}$?

Cada pregunta tiene el siguiente valor:

1)	2)	3)	4)	Bonus
6	6	8	5	5

Soluciones (Examen Final):

1



Para evaluar la integral de linea tenemos dos opciones gracias a teorema de Stokes:

$$\oint_{C=\partial S} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint_S (\nabla\times\vec{v})\cdot d\vec{A}$$

entonces podemos evaluar las 3 integrales de linea sobre cada lado y sumar, ó, integrar la rotacional sobre el area del triangulo. Calculamos:

$$\text{rot}(\vec{v}) = \nabla\times\vec{v} = \det\begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ bz-cy & cx-az & ay-bx \end{pmatrix} = 2(a,b,c)$$

entonces buscamos condiciones sobre a, b, c tal que

$$0 = \iint_S 2(a,b,c)\cdot N\, dA = \iint_S 2(a,b,c)\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\, dA = (a+b+c)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\text{Area}(S)$$

que esta cero $\iff$ $\boxed{a+b+c=0}$

(NOTA: tambien hacer las 3 integrales de linea y sumar no es tan mal.)

2 Notamos que este campo vectorial

$$\vec{v}(\underset{\vec{x}}{x,y,z}) = \frac{\vec{x}-\vec{a}}{|\vec{x}-\vec{a}|^3} \quad \text{sobre } \mathbb{R}^3\setminus\vec{a}$$

tiene divergencia cero. A saber tenemos

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-a_1}{|\vec{x}-\vec{a}|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-a_2}{|\vec{x}-\vec{a}|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-a_3}{|\vec{x}-\vec{a}|^3}\right)$$

calculamos: tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-a_1}{|\vec{x}-\vec{a}|^3}\right) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|^3} - \frac{3(x-a_1)}{|\vec{x}-\vec{a}|^4}\frac{\partial}{\partial x}|\vec{x}-\vec{a}|$$

donde $2|\vec{x}-\vec{a}|\frac{\partial}{\partial x}|\vec{x}-\vec{a}| = 2(x-a_1)$

ya que $|\vec{x}-\vec{a}|^2 = (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2$, y entonces

$\frac{\partial}{\partial x}|\vec{x}-\vec{a}| = \frac{x-a_1}{|\vec{x}-\vec{a}|}$, entonces tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-a_1}{|\vec{x}-\vec{a}|^3}\right) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|^3} - \frac{3(x-a_1)^2}{|\vec{x}-\vec{a}|^5}$$

y similarmente:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-a_2}{|\vec{x}-\vec{a}|^3}\right) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|^3} - \frac{3(y-a_2)^2}{|\vec{x}-\vec{a}|^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-a_3}{|\vec{x}-\vec{a}|^3}\right) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|^3} - \frac{3(z-a_3)^2}{|\vec{x}-\vec{a}|^5}$$

para que, sumando, vemos que sí:

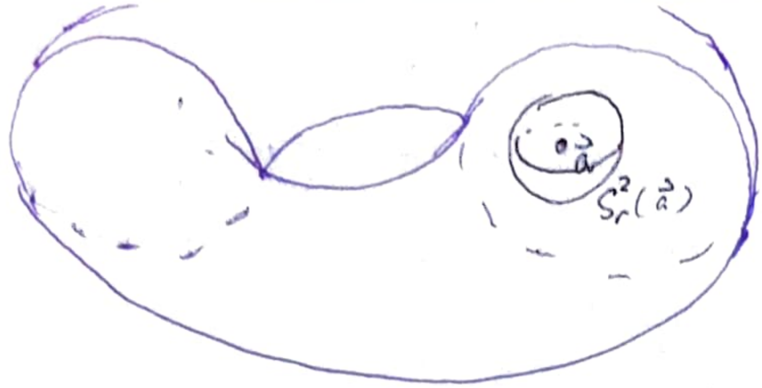
$$\mathrm{div}(\vec{v}) = \frac{3}{|\vec{x}-\vec{a}|^3} - 3\frac{|\vec{x}-\vec{a}|^2}{|\vec{x}-\vec{a}|^5} = 0, \text{ sobre } \mathbb{R}^3 \setminus \vec{a}.$$

---

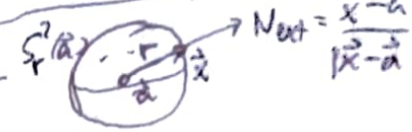
y entonces, por teorema divergencia, podemos cambiar la superficie S a algún OTRA más facil.

Por ejemplo, sea $S_r^2(\vec{a})$ una esfera del radio r centrado por $\vec{a}$ y contenido en el interior del toro:

S



y aplicamos teorema de divergencia a la región sólido entre $S_r^2(\vec{a})$, y S, para ver (usando que $\text{div}(\vec{v})=0$ sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \vec{a}$!):



$$\iint_S \vec{v}\cdot N_{ext}\, dA = \iint_{S_r^2(\vec{a})} \vec{v}\cdot N_{ext}\, dA = \iint_{\vec{x}\in S_r^2(\vec{a})} \frac{(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})}{|\vec{x}-\vec{a}|^4}\, dA$$

$$= \frac{1}{r^2}\iint_{S_r^2(\vec{a})} dA = \frac{1}{r^2}\underbrace{(4\pi r^2)}_{\text{Area}(S_r^2(\vec{a}))} \boxed{= 4\pi.}$$

$\boxed{3}$ (a) $\boxed{\text{Falso}}$ como "numero de vueltas" nos muestra:

$$\vec{v} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

(b) $\boxed{\text{Falso}}$ hemos visto por regla de producto que si

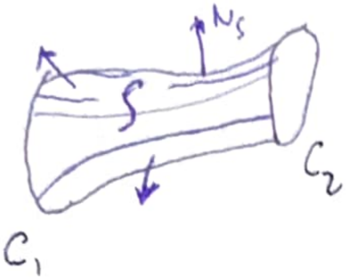
$$\vec{v} = g\nabla f \Rightarrow \nabla\times\vec{v} = \nabla g \times \nabla f + g\underbrace{\nabla\times(\nabla f)}_{0}$$

siempre tiene que satisfacer $\vec{v}\cdot(\nabla\times\vec{v}) = 0$. Pero esto no siempre cumple, por ejemplo para $\vec{v} = (0, x, 1)$ con

$$\nabla\times\vec{v} = (0,0,1).$$

(c) $\boxed{\text{Falso}}$

los dos lazos son la frontera del tubo



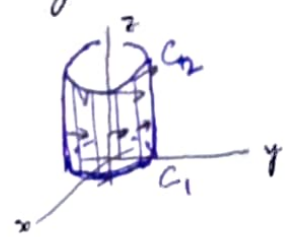
$\partial S = C_1 \cup C_2$

entonces por teorema de Stokes tenemos:

$$\int_{C_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \pm \int_{C_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \iint_S \operatorname{rot}(\vec{v})\cdot N_S \, dA$$

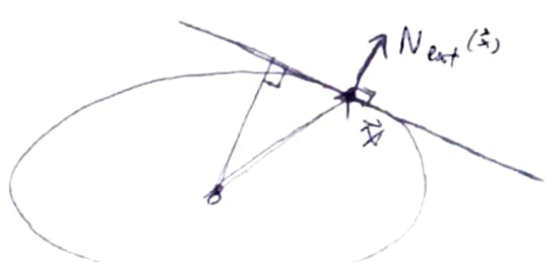
si $\vec{v}$ es tangente al S, generalmente las dos integrales de línea no tienen que ser igual. Por ejemplo:

$\vec{v} = (-yz, xz, 0)$ con



(d) $\boxed{\text{Verdad}}$ debido al formula de Stokes en parte (c), cuando $\operatorname{rot}(\vec{v})$ es tangente al tubo, tenemos $\operatorname{rot}(\vec{v})\cdot N_S \equiv 0$.

$\boxed{4}$ El plano tangente al $\mathcal{E}$ en $\vec{x}$ esta el plano por $\vec{x}$ y normal al $N_{ext}(\vec{x}) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right)}{\| \cdot \|}$:



para tener la distancia de este plano al origen, debemos calcular el magnitud de su proyeccion de $\vec{x}$ al dirección normal:

$$\rho(\vec{x}) = \vec{x} \cdot N_{ext}(\vec{x}).$$

Entonces, queremos calcular: $\iint_{\mathcal{E}} \rho \, dA = \iint_{C} \vec{x} \cdot N_{ext} \, dA$,

que es la integral superficie del campo vectorial:

$\vec{v}(x,y,z) = (x,y,z)$ sobre $\mathcal{E}$.

Notamos que $\operatorname{div}(\vec{v}) = 3$ es constante y que el volumen encerrado por ellipsoide es $\frac{4}{3}\pi abc$ tenemos de la teorema divergencia que:

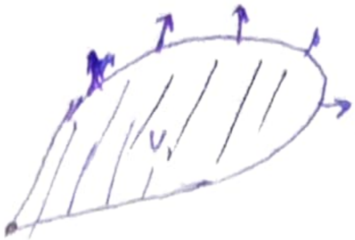
$$\iint_{\mathcal{E}} \rho \, dA = \iint_{\mathcal{E}} \vec{x} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\mathcal{E}^{int}} 3 \, dV = \boxed{4\pi abc}$$

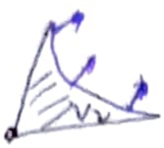
$\boxed{\text{BONUS:}}$ Usando otro punto interior tenemos integral:

$\iint_{\mathcal{E}} \rho_{in} \, dA = \iint_{C} (\vec{x} - \vec{x}_{in}) \cdot d\vec{A}$, y $\operatorname{div}(\vec{x} - \vec{x}_{in}) = 3$ aún para que la resulatados de #4 no cambia, y sigue $4\pi abc$.

Si repetimos con un punto exterior la resultado si cambia, ya que para calcula la distancia al plano tangente, no sería siempre con el normal exterior:

entonces la integral $\iint_{\mathcal{E}} p_{ext}\, dA$ se divide en dos partes, una parte que da 3 veces el volumen de $\mathcal{E}$ más el parte del cono visto desde $\vec{x}_{ext}$, y otra parte que da el volumen del cono visto desde $\vec{x}_{ext}$ sería $3V_1 + 3V_2$, es decir:





$$\iint_{\mathcal{E}} p_{ext}\, dA = 3\left(Vol(\mathcal{E}^{int}) + 2V_2\right)$$

donde V_2 es el volumen del "cono" que $\vec{x}_{ext}$ ve de $\mathcal{E}$: