

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202)

Primavera 2026

Repaso antes examen 2 (curvas planar y espacial, superficies regular)

Aquí un coleccion de problemas para practicar sobre las temas de la 2' da examen.

1. Considera una curva planar regular y suave que es *cerrado* con longitud total L (entonces tiene parametrización $s \mapsto \mathbf{x}(s)$ por longitud del arco tal que $\mathbf{x}(s+L) = \mathbf{x}(s)$). Muestra que el valor del siguiente integral:

$$\int_0^L \kappa(s) ds$$

es algún múltiplo de 2π (donde s es algun parametro por longitud del arco alrededor la curva, y $\kappa(s)$ su curvatura con signo).

Sugerencia: Recuerda que la curvatura satisface $\kappa = d\theta/ds$ para $\theta(s)$ el angulo entre el tangente y algun eje fijado.

2. Sea $s \mapsto \mathbf{x}(s) \in \mathbb{R}^2$ una curva regular planar parametrizado por longitud del arco, y para $l > 0$, considera las curvas equi-distantes:

$$\mathbf{c}_{\pm}(s) = \mathbf{x}(s) \pm l\mathbf{N}(s).$$

- (a) Muestra que $\mathbf{c}_{\pm}(s)$ tiene punto singular exactamente cuando $\mathbf{x}(s)$ tiene puntos de curvatura $\kappa = \pm \frac{1}{l}$.
 - (b) Suponer que la curvatura de $\mathbf{x}(s)$ satisface $0 < \kappa < 1/l$ sobre un arco $s \in [a, b]$ de la curva. Que son las longitudes de los arcos de las curvas $\mathbf{c}_{\pm}(s)$ sobre $s \in [a, b]$?
3. Sea $s \mapsto \mathbf{x}(s) \in \mathbb{R}^2$ una curva regular parametrizado por longitud del arco con $0 < \kappa < 1/l$ sobre algun arco $s \in [a, b]$. Considera una 'banda' alrededor tal curva de ancho $2l$ parametrizado como:

$$[a, b] \times [-l, l] \ni (s, t) \mapsto \mathbf{x}(s) + t\mathbf{N}(s) = \mathbf{f}(s, t)$$

y supongamos que $\mathbf{f}$ es inyectiva y regular.

- (a) Considerando $\mathbf{f}$ como un parametrización de un parche de superficie (un region del plano), calcular el area de esta banda.
 - (b) Que son las areas de los medio bandas trazado por $\mathbf{f}_+ = \mathbf{f}|_{[a,b] \times [0,l]}$ o $\mathbf{f}_- = \mathbf{f}|_{[a,b] \times [-l,0]}$?
4. Considera una curva planar cerrada, $C \subset \mathbb{R}^2$, que encierra un region de area A . Suponer que hay un punto $p \in C$ en tal curva donde el círculo osculante a C esta contenido completamente en el interior de la region encerrado por C . Muestra que la curvatura de C por p satisface:

$$k(p) \geq \sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

5. Una curva espacial regular (con curvatura no cero) tiene asociado tres planos en cada punto: el plano normal spaneado por $\mathbf{N}, \mathbf{B}$, el plano osculante spaneado por $\mathbf{T}, \mathbf{N}$, y el plano ‘rectificante’ spaneado por $\mathbf{T}, \mathbf{B}$. Considera las siguientes aplicaciones $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ asociados a tal familias de planos:

$$\mathbf{f}(s, u, v) = \mathbf{x}(s) + u\mathbf{T}(s) + v\mathbf{N}(s),$$

$$\mathbf{g}(s, u, v) = \mathbf{x}(s) + u\mathbf{N}(s) + v\mathbf{B}(s),$$

$$\mathbf{h}(s, u, v) = \mathbf{x}(s) + u\mathbf{B}(s) + v\mathbf{T}(s).$$

Determina los puntos singular (donde $\det D\mathbf{f} = 0, \det D\mathbf{g} = 0, \det D\mathbf{h} = 0$) asociado a estas aplicaciones.

Comentario: La traza de estos puntos singular forman los ‘envelopes’ de tales familias de planos.

6. Sea $s \mapsto \mathbf{x}(s) \in \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizado por longitud del arco contenido en la esfera unitario: $|\mathbf{x}(s)| = 1$.

- (a) Muestra que la curvatura de esta curva satisface:

$$k \geq 1$$

- (b) En el caso que $\mathbf{x}(s+L) = \mathbf{x}(s)$ traza una curva cerrado en la esfera ($|\mathbf{x}| = 1$) con longitud total L , muestra que:

$$\int_0^L \tau(s) ds = 0$$

para $\tau(s)$ la torsion de la curva.

7. Sea $s \mapsto \mathbf{x}(s) \in \mathbb{R}^3$ una curva espacial regular parametrizado por longitud del arco con tangente unitario $\mathbf{T}(s)$ a lo largo la curva.

- (a) Sea $\mathbf{u}(s), \mathbf{v}(s)$ algún base ortonormal para $\mathbf{T}(s)^\perp$ a lo largo la curva con $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{T}$. Calcular las derivadas $\mathbf{T}', \mathbf{u}', \mathbf{v}'$ expresada en el base ortonormal $\mathbf{T}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$.
- (b) Muestra que existe algun base ortonormal $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ para $\mathbf{T}^\perp$ a lo largo la curva como en parte (a) tal que tenemos:

$$(*) \quad \mathbf{U}' = u\mathbf{T}, \quad \mathbf{V}' = v\mathbf{T}$$

Sugerencia: Cada posible eleccion de base ortonormal de $\mathbf{T}^\perp$ podemos escribir en la forma $\mathbf{U} = \cos \theta \mathbf{u} + \sin \theta \mathbf{v}$, $\mathbf{V} = -\sin \theta \mathbf{u} + \cos \theta \mathbf{v}$ para algúnos angulos $s \mapsto \theta(s)$ a lo largo la curva (y $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ como en (a)).

- (c) Para un base $\mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{V}$ como en parte (b) sea $\varphi(s)$ al angulo de rotacion que gira $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ al marco de Frenet-Serret: $\mathbf{N} = \cos \varphi \mathbf{U} + \sin \varphi \mathbf{V}$ y $\mathbf{B} = -\sin \varphi \mathbf{U} + \cos \varphi \mathbf{V}$. Muestra que:

$$\int_a^b \tau(s) ds = \varphi(b) - \varphi(a)$$

donde τ es la torsion a lo largo la curva.

- (d) Como relacionan las coeficientes u, v en $(*)$ con la curvatura de la curva $s \mapsto \mathbf{x}(s)$?
- (e) Es un base $\mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{V}$ como en parte (b) a lo largo la curva única?
8. Considera una curva planar regular y parametrizado como: $t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ con curvatura positiva: $\kappa \in (0, \infty)$. Suponer que no hemos elegido un unidad de longitud (entonces no hay sentido en elegir un vector tangente unitario a lo largo la curva) pero aun podemos medir angulos y razones de longitudes. Sea $\mathbf{u} \sim \mathbf{x}'$ algún vector tangente a la curva, y $\mathbf{v}$ la rotacion de $\mathbf{u}$ por $\pi/2$ en sentido anti-horario.

- (a) Muestra que tal marco $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ a lo largo la curva tiene derivadas de la forma:

$$d\mathbf{u}/dt = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$$

$$d\mathbf{v}/dt = -b\mathbf{u} + a\mathbf{v}$$

para algunos coeficientes $a(t), b(t) \in \mathbb{R}$.

- (b) Muestra que existe un reparametrizacion de tal curva $t = \varphi(\sigma)$ tal que:

$$d\mathbf{x}/d\sigma = \mathbf{U}$$

$$d\mathbf{U}/d\sigma = A\mathbf{U} + \mathbf{V}$$

$$d\mathbf{V}/d\sigma = -\mathbf{U} + A\mathbf{V}$$

donde $\mathbf{V}$ es la rotacion de $\mathbf{U}$ por $\pi/2$ en sentido anti-horario.

Comentario: El coeficiente A es un invariante de curva planar bajo transformaciones de similitud del plano (traslaciones/rotaciones/escalamientos).

- (c) Que representa la integral $\int_a^b d\sigma$ sobre un arco de la curva?

RESUMEN DE TEMAS/FORMULAS PRINCIPALES:

- LONGITUD DE ARCO: $s = \int_{t_0}^t |\mathbf{x}'(t)| dt$
- CURVATURA, TORSION: su definicion por las ecuaciones de Frenet-Serret:

$$d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}, \quad d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \quad d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$$

(bien definido cuando la curva admite parametrización con $\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}'' \neq 0$).

- SUPERFICIES REGULAR: una aplicación de clase C^1 :

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{f}(u, v)$$

es llamado una parametrización superficie *regular* en los puntos donde $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$.

- AREA SUPERFICIE: áreas de parches de superficies parametrizadas regular: $\mathbf{f}(R) \subset \mathbb{R}^3$, donde $R \subset \text{dom}(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^2$, son dados por integrales dobles:

$$\iint_R \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} \right| du dv$$