Instituto Tecnológico Autónomo de México

Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202) Primavera 2026

Repaso antes examen 3 (integrales multiples, integrales de linea)

Aqui unas problemas para practicar sobre las temas de la 3'ra examen.

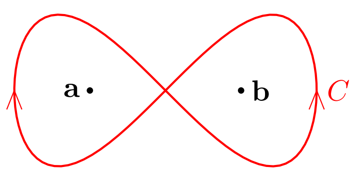
1. Calcula las siguientes integrales:
   (a) $\int_D y^2 e^{xy} dA$ sobre $D = \{0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y\}$
   (b) $\int_D \frac{x^2}{x^4+1} dA$ sobre $D = \{0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq 1\}$
   (c) $\int_D \cos(x+2y)\sin(2x-y) dA$ donde D es la region con frontera el eje x, y las lineas $x+2y = 4, y = 2x$ (usa un cambio de variable)
   (d) $\int_D b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 \; dV$ sobre $D = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$

2. El centro de masa de un region planar $D \subset \mathbb{R}^2$ esta el punto con coordenadas:
$$x_{cm} = \frac{\int_D x \; dA}{Area(D)}, \quad y_{cm} = \frac{\int_D y \; dA}{Area(D)}.$$
   (a) Encuentra el centro de masa de un triangulo con vertices $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Determina el centro de masa de un sector del círculo radio r con angulo de abertura θ.
   (c) Usando la definicion analogo en $\mathbb{R}^3$, determina el centro de masa de un hemisfera superior: $z \geq 0$, y, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

3. Considera el region solido obtenido en girar alrededor el eje z un region planar D (digamos en el plano zy) que no intersecte el eje z. Muestra la teorema de Pappus: el volumen de este solido de revolucion esta dado por:
$$2\pi R_o Area(D)$$
   donde R_o es la distancia del centro de masa de D al eje z.

4. Considera 3-puntos, digamos en el plano xz, ubicado en los vertices de un triangulo que no intersecte el eje z. Calcula el volumen del region solido trazado en girar este triangulo alrededor el eje z.

5. Considera dos puntos en el plano $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, que generan el campo vectorial
$$\vec{v}(\mathbf{x}) := \frac{(a_2 - y, x - a_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2} + \frac{(b_2 - y, x - b_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|^2}, \quad (\mathbf{x} = (x, y) \neq \mathbf{a}, \mathbf{b})$$
   sobre $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Determina el integral de linea:
$$\oint_C \vec{v} \cdot d\mathbf{x}$$
   sobre la curva cerrada, C, en la siguiente figura:



6. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un region planar de la forma

$$a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x).$$

   Demuestra que:

$$Area(D) = \oint_{\partial D} x dy = \oint_{\partial D} -y dx$$

   cuando la frontera, ∂D, de D se orienta en sentido anti-horario.

   Sugerencia: Puedes usar integracion por partes para relacionar los dos integrales de linea con un otro.

7. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ parametrizacion de un arco regular, $C = im(\gamma)$ que va desde $\mathbf{a} = \gamma(a)$ a $\mathbf{b} = \gamma(b)$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un funcion (campo escalar) de clase C^1. El gradiente de f es el campo vectorial:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

   Demuestra que:

$$\int_C (\nabla f \cdot T) ds = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$$

   (nuestro primer generalizacion del teorema fondamental del calculo un variable).

8. Considere la transformación:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \backslash (0,0) \to \mathbb{R}^2 \backslash (0,0), \quad \varphi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

   Calcular el area del region $\varphi(D)$, donde D es el parte superior del elipse centrado por el origen:

$$D = \{(x, y) : y \geq 0, \ x^2 + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

   con semi-eje menor: $1 \geq b > 0$.