

# Instituto Tecnológico Autónomo de México

## Departamento de Matemáticas

Cálculo Vectorial (MAT-12202)

Primavera 2026

Tarea 9 (Integrales de línea - Continuación)

---

---

1. Sean  $M(x, y) = x^2 + y^2$  y  $N(x, y) = x - y$ . Sea  $R$  la región plana acotada por  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $x + y = 1$ , y  $C$  es la frontera de  $R$  recorrida en sentido antihorario. Calcula:

(a) 
$$\iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$

(b) 
$$\int_C M dx + N dy.$$

2. Sea  $C$  la frontera de la región plana  $R$ , orientada en sentido positivo (antihorario), definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1, x \leq 4, y \leq \sqrt{x}\}.$$

Demuestra que

$$\int_C x^2 dy = 2 \iint_R x dx dy.$$

3. Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  una región que cumple las condiciones del Teorema de Green y denota por  $A$  su área.

(a) Demuestra que

$$A = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx,$$

donde  $\Gamma$  es la frontera de  $D$ , orientada en el sentido directo.

- (b) Usando el inciso anterior, calcula el área de la región acotada por la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , con  $a > b > 0$ .

4. (a) Demuestra que puedes utilizar el Teorema de Green para calcular

$$\int_C \frac{1}{y} dx + \frac{1}{x} dy,$$

a lo largo de la curva  $C$ , cerrada y orientada positivamente, que es la frontera de la región plana  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1, x \leq 4, y \leq \sqrt{x}\}$ .

(b) Utilizando el Teorema de Green, calcula

$$\int_C \frac{1}{y} dx + \frac{1}{x} dy.$$

5. Sea  $E$  la curva frontera de la región plana definida por  $y \leq x^2$ ,  $y \geq -x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , recorrida en sentido directo, calcula, usando el Teorema de Green,

$$\int_E (x^2 + y^2) dx + xy^2 dy.$$

6. Considera la integral doble  $I$ , expresada del siguiente modo:

$$I = \int_{-1}^1 \left\{ \int_{x^2+1}^{3-|x|} f(x, y) dy \right\} dx,$$

donde  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en el dominio de integración  $D$ .

- (a)
  - i. Describe analíticamente y representa geoméricamente el dominio  $D$ .
  - ii. Cambia el orden de integración en  $I$ .
  - iii. Calcula el área de  $D$ .
- (b) Sea  $\Gamma$  la frontera de  $D$ , orientada en el sentido directo.
  - i. Indica una parametrización (seccionalmente regular) para la línea  $\Gamma$ .
  - ii. Verifica que

$$\oint_{\Gamma} x dy - y dx = 2A,$$

donde  $A$  denota el área del dominio  $D$ .

7. Calcula  $\oint_{\Gamma} xy(y dx - x dy)$  a lo largo de la lemniscata  $\Gamma$  definida en coordenadas polares por  $\rho^2 = a^2 \cos(2\theta)$  ( $a > 0$ ), correspondiente a  $x \geq 0$  y recorrida en sentido positivo (antihorario). ¿Cuál es el área de la región limitada  $\Gamma$ ?

8. Calcula

$$\oint_{\mathcal{C}} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy,$$

donde  $\mathcal{C}$  es la curva cerrada que delimita la región entre  $y = x^2$  e  $y^2 = x$ . Comprueba el resultado utilizando el Teorema de Green en el plano.

9. Considera la integral doble:

$$\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{x^2+1} f(x, y) dy dx,$$

donde  $f$  es una función real continua cuyo dominio contiene la región de integración  $R$ .

- (a) Haz un esbozo gráfico de  $R$  e invierte el orden de integración.
- (b) Sea  $\Gamma$  la frontera de  $R$  orientada en el sentido positivo. Verifica si se cumplen las condiciones del Teorema de Green y, en caso afirmativo, demuestra que

$$\int_{\Gamma} y(\cos x - 5) dx + \sin x dy = 5A(R),$$

donde  $A(R)$  denota el área de la región  $R$ .

10. Determina el área del conjunto plano acotado por la curva definida por la ecuación polar  $\rho = 1 + (\sin(2\theta) + |\sin(2\theta)|) / 2$ .
11. Demuestra que el área de la región del plano acotada por la cardioide cuya ecuación polar está dada por  $\rho = a(1 + \cos \theta)$ , con  $a > 0$ , es igual a  $(3/2)a^2\pi$ .